

Aktives elliptisches TP-Glied zweiter Ordnung nach Boctor

Das Tiefpassglied nach Boctor ist ein aktives elliptisches Grundglied zweiter Ordnung mit einem Operationsverstärker. Es erlaubt die einfache Realisation elliptischer und inverser Tschebyscheff-Filter basierend auf gegebenen Nullstellen-/ Polfrequenzen und Polgüten. Die Besonderheit ist die unabhängige Abgleichbarkeit der Vorgabegrößen. Gezeigt wird nachfolgend die Analyse und Herleitung der Dimensionierungsformeln mit Vorgabe der Kondensatoren. Beispiele zeigen die Realisationen konkreter Schaltungen.

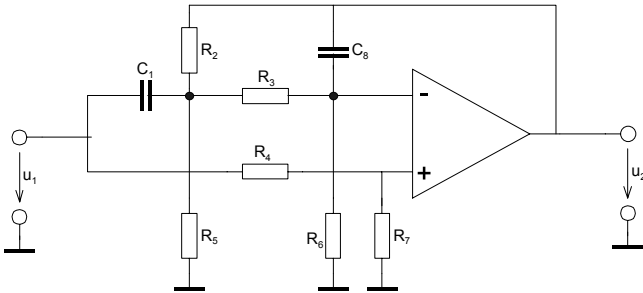


Bild 1: Elliptisches Tiefpass-Grundglied 2. Ordnung mit Brücken-T-Rückführung nach Boctor.

Grundlagen

Elliptische Grundglieder implementieren in der Tiefpass-Übertragungsfunktion neben den Polfrequenzen ω_p und Polgüten Q_p auch endliche Nullstellenfrequenzen ω_z . Für die Nullstellengüte gilt per Definition $Q_z \rightarrow \infty$. Am Beispiel der zweiten Ordnung wird dies:

$$G(s) = \frac{1 + \frac{s}{Q_z \omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + \frac{s}{Q_p \omega_p} + \frac{s^2}{\omega_z^2}} \stackrel{Q_z \rightarrow \infty}{=} \frac{1 + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + \frac{s}{Q_p \omega_p} + \frac{s^2}{\omega_z^2}} \quad (1)$$

Durch Einbringen endlicher Nullstellen wird eine grössere Flankensteilheit erreicht, jedoch auf Kosten der maximalen Sperrdämpfung. Die Nullstellen/ Polstellen und Polgüten werden durch Rechnung oder mit tabellierten Werten bestimmt. Diese Berechnungen werden nachfolgend als bekannt vorausgesetzt, da sie nicht Schwerpunkt dieses Artikels sind. Eine Auswahl an ein- und weiterführender Literatur zur Synthese der Pol-/Nullstellen ist [ZVE67], [ELL94] und [DAN74]. Direkt einsetzbare tabellierte Werte sind beispielsweise in [HER84] aufgeführt.

Aktive Tiefpass-Schaltungen mit Implementierung endlicher Nullstellen sind in Analyse und Dimensionierung aufwändig. Dies wurde bereits in der Analyse des Tiefpasses nach Scultety [KRU02-1] aufgezeigt. Durch Zufügen zweier Widerstände im Brücken-T-Glied erhöht sich die Anzahl der wählbaren Parameter. Die Berechnung wird vereinfacht und ein unabhängiger Abgleich von ω_p, ω_z, Q_p und Q_z wird möglich.

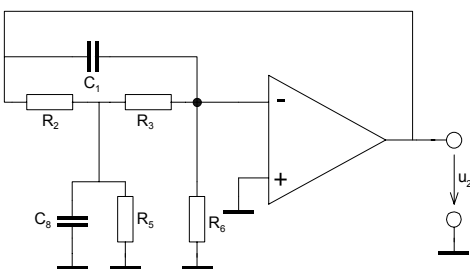


Bild 2: Grundschtung Tiefpass 2. Ordnung nach Boctor.

Übertragungsfunktion

Mit Hilfe eines Knoten-/Maschenansatzes wird die Übertragungsfunktion bestimmt. Ein Beispiel zum Vorgehen ist in [KRU02-1] aufgeführt.

Die Übertragungsfunktion wird für den allgemeinen Fall mit gegebenen Elementwerten:

$$G(s) = A_0 \frac{1 + s \left[\frac{R_6 R_7 C_8 (R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_5) + R_2 R_5 C_1 (R_3 R_7 - R_4 R_6)}{R_7 (R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_2 R_6 + R_3 R_5 + R_5 R_6)} \right] + s^2 \left[\frac{R_2 R_3 R_5 C_1 C_8}{R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_2 R_6 + R_3 R_5} \right]}{1 + s \left[\frac{C_8 (R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_6)}{R_5} \right] + s^2 R_2 R_3 C_1 C_8} \quad (2)$$

$$A_0 = \frac{R_7 (R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_2 R_6 + R_3 R_5 + R_5 R_6)}{R_5 R_6 (R_4 + R_7)} \quad (3)$$

Wenn sichergestellt ist, dass die Schaltung ein präzise dimensioniertes elliptisches oder Tschebyscheff-Typ 2-Filter ist, kann das lineare Glied im Zähler wegen $Q_Z \rightarrow \infty$ ohne Fehler weggelassen werden.

Dimensionierungsgleichungen

Aus der Übertragungsfunktion werden mit Koeffizientenvergleich die Dimensionierungsgleichungen hergeleitet. Ohne Rücksicht auf minimale Empfindlichkeiten ist es für die Praxis zweckmässig nach Möglichkeit die Kondensatorwerte vorzugeben. Eine einfache formale Lösung entsteht, wenn man $R_7 C_1$ und C_8 und vorgibt. Die restlichen Grössen werden mit den Filterparameter ω_p , ω_z , Q_p und $A_0 \geq 1$:

$$D = C_1^2 \omega_z^4 - 4 C_1 C_8 A_0^2 \omega_p^2 (\omega_p^2 + Q_p^2 \omega_z^2) \quad (\text{Hilfsgrösse}) \quad A_0 \geq 1 \quad (4)$$

$$R_2 = \frac{C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D}}{2 C_1 C_8 A_0 Q_p} \quad (5)$$

$$R_3 = \frac{2 A_0 Q_p \omega_p}{C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D}} = \frac{1}{C_1 C_8 R_2 \omega_p^2} \quad (6)$$

$$R_4 = \frac{R_7 (\omega_z^2 - A_0 \omega_p^2)}{\omega_p^2 A_0} \quad (7)$$

$$R_5 = \frac{Q_p (C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D}) A_0 \omega_p}{C_8 \left((A_0 \omega_p^2 - \omega_z^2) (C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D}) + 2 C_8 A_0^2 \omega_p^2 (\omega_p^2 + \omega_z^2 Q_p^2 - \omega_p^2 Q_p^2) \right)} = \frac{-Q_p R_2}{R_2^2 C_1 C_8 Q_p \omega_p^2 + Q_p + R_2 C_1 \omega_p} \quad (8)$$

$$R_6 = \frac{-Q_p (C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D}) A_0 \omega_p}{C_8 \left[\frac{C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D}}{2 C_8} - \frac{\omega_z^2 (C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D})}{2 C_8 A_0 \omega_p^2} + A_0 \omega_p^2 \right]} = \frac{R_7 Q_p}{C_8 \omega_p (R_2 R_4 C_1 \omega_p - R_7)} \quad (9)$$

Kondensatorwerte

Der Kondensatorwert C_1 oder C_8 wird durch Wahl vorgegeben. Der verbleibende Kondensator C_8 oder C_1 kann jedoch nicht frei gewählt werden. Aus der formalen Lösung für R_5 in (8) können die Restriktionen abgeleitet werden:

$$C_8 < \frac{C_1 \left[\omega_Z^4 Q_P^2 (A_0 - 1) + \omega_Z^2 \omega_P^2 Q_P^2 (A_0 - A_0^2) + \omega_P^2 A_0 (\omega_Z^2 - A_0 \omega_P^2) \right]}{A_0^2 \left(Q_P^2 (\omega_Z^2 - \omega_P^2) + \omega_P^2 \right)^2} \quad (A_0 \geq 1) \quad (10)$$

oder:

$$C_1 > \frac{C_8 A_0^2 \left(Q_P^2 (\omega_Z^2 - \omega_P^2) + \omega_P^2 \right)^2}{\left[\omega_Z^4 Q_P^2 (A_0 - 1) + \omega_Z^2 \omega_P^2 Q_P^2 (A_0 - A_0^2) + \omega_P^2 A_0 (\omega_Z^2 - A_0 \omega_P^2) \right]} \quad (11)$$

Für C_1, C_8 wird der nächst passende Normwert gewählt und als Vorgabe zur Rechnung in (4)..(9) benutzt. Bei steigender Polgüte und kleiner Verstärkung wird das Verhältnis C_1/C_8 sehr gross und für die Praxis ungünstig. Dadurch wird der Einsatzbereich dieser Schaltung auf $Q_P < \approx 5$ eingeschränkt.

Für eine abgleichfreie Lösung sollten die Kondensatoren ausgemessen werden. Die gemessenen Werte bilden nachher die Grundlage zur Rechnung in (4)..(9). Die Praxis zeigt, dass bei handelsüblichen Kondensatoren mit grösseren Streuungen zu rechnen ist. Widerstände werden aus der E24-, oder besser, E96-Reihe eingesetzt. Die Kondensatoren sollten nach Möglichkeit so gewählt werden, dass schlussendlich alle Widerstände im Bereich 500Ω..500kΩ liegen.

Pol-Nullstellenfrequenzen, Pol-Nullstellengüten

Aus der Übertragungsfunktion (2), beschrieben mit den Elementwerten können durch Koeffizientenvergleich mit (1) direkt die Grössen $\omega_p, \omega_z, Q_p, Q_z$ gefunden werden.

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_8}} \quad (12)$$

$$Q_p = \frac{R_5}{\omega_p C_8 (R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_5)} \quad (13)$$

$$\omega_z = \frac{\sqrt{R_2 R_3 R_5 R_6 C_1 C_8 (R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_2 R_6 + R_3 R_5 + R_5 R_6)}}{R_2 R_3 R_5 R_6 C_1 C_8} \quad (14)$$

$$Q_z = \frac{R_7 (R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_2 R_6 + R_3 R_5 + R_5 R_6)}{\omega_z (R_3 R_6 R_7 C_8 (R_2 + R_5) + R_3 R_5 R_7 (R_2 C_1 + R_3 C_8) - R_2 R_4 R_5 R_6 C_1)} \quad (15)$$

Die Nullstellengüte Q_z sollte im Idealfall nach Unendlich laufen. In der Praxis ist dieser Wert durchaus eine endliche Grösse und sollte berücksichtigt werden, wenn der Dämpfungspol eine Rolle spielt.

Abgleich

Das Boctor-Filter erlaubt einen unabhängigen Abgleich der Vorgabegrößen ω_p , ω_z , Q_p und $Q_z \rightarrow \infty$. Aus den Empfindlichkeiten kann die Abgleichvorschrift abgeleitet werden. Es gilt die Abgleichvorschrift nach [HER84].

$$\left. \begin{array}{l} R_1 \rightarrow \omega_p \\ R_6 \rightarrow Q_p \end{array} \right\} \text{Für Abgleich } R_4 \text{ kurzschliessen}$$
$$R_5 \rightarrow \omega_z$$
$$R_3 \rightarrow Q_z$$
(16)

Zusammenfassung

Gezeigt wurde ein Formelsatz zur Dimensionierung und Analyse des Boctor-Tiefpasses 2. Ordnung nach Bild 1. Diese Schaltung erlaubt eine einfache Implementierung einer Tiefpassfunktion mit endlichen Nullstellen. Nachteilig ist die maximal erreichbare Polgüte $Q_p < 5$ bei kleinen Anfangsverstärkungen. In diesen Fällen wird auch das Kapazitätsverhältnis C_1/C_8 sehr gross. Weiter werden recht hohe Anforderungen für das A_0 und ω_i des Operationsverstärkers gestellt. Für eine Abschätzung gilt vereinfacht nach [HER84] ca. $f_p < 0.1 f_T$ (f_T : Transitfrequenz des OpAmps). Die einfache und gut dimensionierbare Schaltung ist hingegen sicher als Vorteil zu werten. Sind höhere Polgüten zu realisieren wählt man zweckmässigerweise eine bessere Schaltung, z.B. aus der Gruppe der State-Variable-Filter.

Beispiele

Für direkten Vergleich werden von der Aufgabenstellung her dieselben Beispiele wie in [KRU02-1] gezeigt.

Beispiel 1: TP-Übertragungsfunktion mit endlichen Nullstellen.

Zu realisieren ist eine Tiefpassübertragungsfunktion 2. Ordnung nach (1) mit einem elliptischen Glied nach Bild 1 mit folgenden Vorgaben:

$$\begin{array}{ll} \omega_p = 6283 \text{ Hz} & Q_p = 5 \\ \omega_z = 62830 \text{ Hz} & A_0 = 2 \\ R_8 = 10 \text{ k}\Omega & C_2 = 1 \text{ nF} \end{array}$$

Die Lösung soll mit einer PSpice-Simulation überprüft werden. Hierbei ist ein LM741 OpAmp zu verwenden.

Lösung:

Die Berechnung erfolgt direkt mit den Formeln. Die numerische Rechnung für die Elementwerte erfolgt hier mit MathCad.

Vorgaben:

ORIGIN:= 0

$$f_C := 1\text{kHz} \quad R_7 := 10\text{k}\Omega \quad C_1 := 120\text{nF} \quad C_8 := 1\text{nF}$$

$$Q_p := 5 \quad \omega_p := 6.61\text{kHz} \quad \omega_z := 65.0\text{kHz} \quad A_0 := 2$$

Berechnungen:

$$C_{1\text{min}} := \frac{C_8 \cdot A_0^2 \cdot [Q_p^2 \cdot (\omega_z^2 - \omega_p^2) + \omega_p^2]}{[\omega_z^4 \cdot Q_p^2 \cdot (A_0 - 1) + \omega_z^2 \cdot \omega_p^2 \cdot Q_p^2 \cdot (A_0 - A_0^2) + \omega_p^2 \cdot A_0 \cdot (\omega_z^2 - A_0 \cdot \omega_p^2)]}$$

$$C_{1\text{min}} = 100.012 \times 10^{-9} \text{F}$$

$$D := C_1^2 \cdot \omega_z^4 - 4 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot A_0^2 \cdot \omega_p^2 \cdot (\omega_p^2 + Q_p^2 \cdot \omega_z^2) \quad D = 2.492692 \times 10^5 \frac{\text{s}^4 \cdot \text{A}^4}{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4}$$

$$R_4 := \frac{R_7 \cdot (\omega_z^2 - A_0 \cdot \omega_p^2)}{\omega_p^2 \cdot A_0} \quad R_4 = 474.246 \times 10^3 \Omega$$

$$R_2 := \frac{C_1 \cdot \omega_z^2 - \sqrt{D}}{2 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot A_0 \cdot Q_p \cdot \omega_p^3} \quad R_2 = 12.719 \times 10^3 \Omega$$

R3, R5, R6 werden mit den vereinfachten Formel berechnet, da R2 und R4 bekannt sind:

$$R_3 := \frac{1}{C_1 \cdot C_8 \cdot R_2 \cdot \omega_p^2} \quad R_3 = 14.986 \times 10^3 \Omega$$

$$R_5 := \frac{-Q_p \cdot R_2}{Q_p + R_2^2 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot Q_p \cdot \omega_p^2 - R_2 \cdot C_1 \cdot \omega_p} \quad R_5 = 74.97 \times 10^3 \Omega$$

$$R_6 := \frac{R_7 \cdot Q_p}{C_8 \cdot \omega_p \cdot (R_7 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot \omega_p - R_7)} \quad R_6 = 316.139 \times 10^0 \Omega$$

Man erkennt in der Simulation deutlich die Abweichungen in der Polgüte (Soll: +20dB) und Nullstellenfrequenz. Dies ist durch den Operationsverstärker LM741 begründet. Durch Verwendung eines besseren Operationsverstärkers, z.B. LF411 kann das Resultat wesentlich verbessert werden.

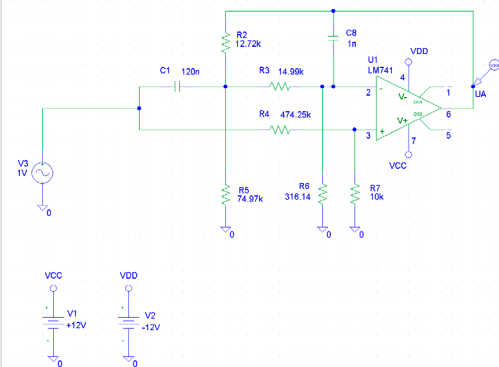
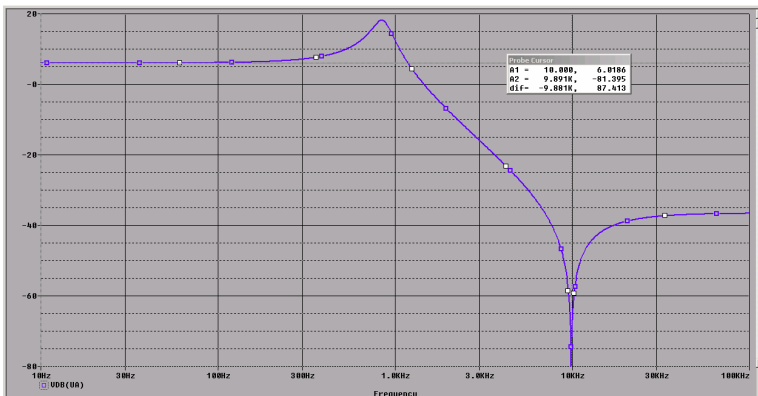


Bild 3: Amplitudengang und Schema der Lösung zu Beispiel 1.

Beispiel 2: Inverser Tschebyscheff Tiefpass

Zu realisieren ist ein inverser Tschebyscheff-Tiefpass 3. Ordnung mit den Anforderungen $A_0=3\text{dB}$, $f_c=1\text{kHz}$, $A_c=1\text{dB}$, $A_H=40\text{dB}$. Die wählbaren Komponenten sind mit $R_8=10\text{k}\Omega$ und $C_2=4.7\text{nF}$ einzusetzen.

Lösung

Das Filter wird als Kaskade eines linearen und quadratischen Gliedes realisiert. Die normierten Pole/Nullstellen und Polgüte werden mit einer Tabelle, z.B. [HER84] S.262 oder [KRU02-2], bestimmt:

$$n = 3 :$$

$$\Omega_{P1} = 1.3904 \quad (\text{lin.Glied})$$

$$\Omega_{Z2} = 2.996 \quad \Omega_{P2} = 1.26120 \quad Q_{P2} = 1.10244 \quad (\text{Ellipt.TP2.Ordnung})$$

Wir bestimmen zuerst mit einem möglichen für Wert C_8 für das quadratische Glied aus der Vorgabe, Nachher werden die restlichen Elementwerte berechnet.

Vorgaben:

$$f_c := 1\text{kHz} \quad A_{0\text{dB}} := 3 \quad R_7 := 10\text{k}\Omega$$

$$C_8 := 4.7\text{nF} \quad \Omega_{P1} := 1.3904 \quad \Omega_{P2} := 1.261 \quad \Omega_{Z2} := 2.996 \quad Q_{P2} := 1.10$$

Berechnungen ellipt. Glied :

$$\omega_p := 2\pi \cdot \Omega_{P2} \cdot f_c \quad \omega_p = 7.923 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$\omega_z := 2\pi \cdot \Omega_{Z2} \cdot f_c \quad \omega_z = 18.824 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$A_0 := 10^{0.05 \cdot A_{0\text{dB}}} \quad A_0 = 1.413 \times 10^0$$

$$Q_p := Q_{P2}$$

$$C_{1\text{min}} := \frac{C_8 \cdot A_0^2 \cdot [Q_p^2 (\omega_z^2 - \omega_p^2) + \omega_p^2]^2}{[\omega_z^4 Q_p^2 (A_0 - 1) + \omega_z^2 \omega_p^2 Q_p^2 (A_0 - A_0^2) + \omega_p^2 A_0 (\omega_z^2 - A_0 \omega_p^2)]}$$

$$C_{1\text{min}} = 23.043 \times 10^{-9} \text{ F} \quad C_1 := 33\text{nF} \quad (\text{Wahl})$$

$$D := C_1^2 \omega_z^4 - 4 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot A_0^2 \cdot \omega_p^2 \cdot (\omega_p^2 + Q_p^2 \omega_z^2) \quad D = 98.427724 \frac{\text{s}^4 \cdot \text{A}^4}{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4}$$

$$R_4 := \frac{R_7 (\omega_z^2 - A_0 \omega_p^2)}{\omega_p^2 \cdot A_0} \quad R_4 = 29.963 \times 10^3 \Omega$$

$$R_2 := \frac{C_1 \omega_z^2 - \sqrt{D}}{2 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot A_0 \cdot Q_p \cdot \omega_p^3} \quad R_2 = 7.381 \times 10^3 \Omega$$

R_3, R_5, R_6 werden mit den vereinfachten Formel berechnet, da R_2 und R_4 bekannt sind:

$$R_3 := \frac{1}{C_1 \cdot C_8 \cdot R_2 \cdot \omega_p^2} \quad R_3 = 13.914 \times 10^3 \Omega$$

$$R_5 := \frac{-Q_p \cdot R_2}{Q_p + R_2^2 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot Q_p \cdot \omega_p^2 - R_2 \cdot C_1 \cdot \omega_p} \quad R_5 = 33.425 \times 10^3 \Omega$$

$$R_6 := \frac{R_7 \cdot Q_p}{C_8 \cdot \omega_p \cdot (R_2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot Q_p \cdot \omega_p - R_7)} \quad R_6 = 5.508 \times 10^3 \Omega$$

Berechnung lineares Glied:

$$\omega_p := 2\pi \cdot \Omega_{P1} \cdot f_c$$

$$C := C_8$$

$$R := \frac{1}{\omega_p \cdot C} \quad R = 24.355 \times 10^3 \Omega$$

Das lineare Glied wird mit der Vorgabe $C=C_8$ gemäss Formelsammlung [KRU01] bestimmt. Es wird dem quadratischen Glied vorgeschaltet.

Die Simulation bestätigt die Dimensionierung mit vernachlässigbar kleinen Abweichungen:

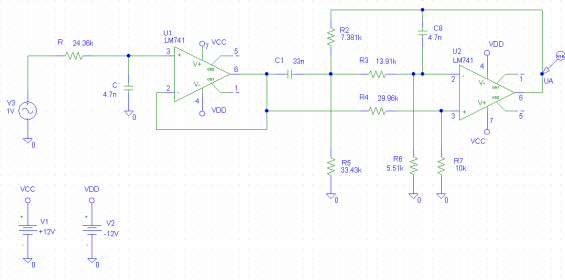
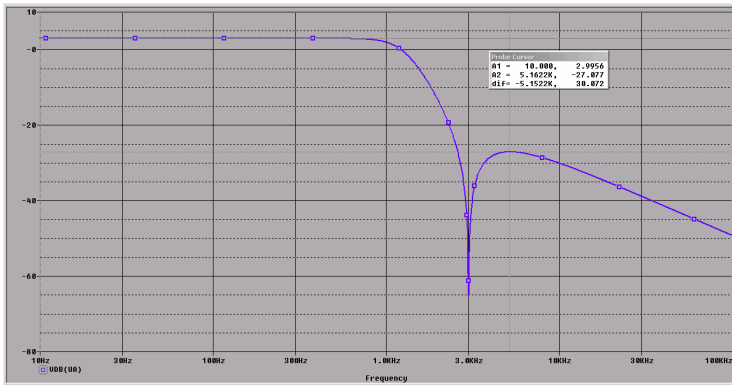


Bild 4: Detailschema und Simulation der Lösung zum inversen Tschebyscheff-Tiefpass 3. Ordnung nach Beispiel 2.

Literatur

- [DAN74] Approximation Methods for Electronic Filter Design, R. Daniels, Mc Graw Hill 1974, ISBN0-07-01308-6
- [ELL94] Electronic Filter Analysis and Design, Michael G. Ellis Sr., Artech House 1994 ISBN 0-890006-616-7
- [HER84] Aktive RC-Filter, M. Herpy/ J. Berka, Franzis Verlag 1984, ISBN 3-7723-7011-X
- [SCH01] Design of Analog Filters, R. Schaumann/ M. E. van Valkenburg, Oxford University Press 2001, ISBN 0-19-511877-4
- [KRU01] Formelsammlung aktive Filter, G. Krucker 1998-2001, Download von www.krucker.ch
- [KRU02-1] Aktives elliptisches Glied 2. Ordnung mit einem Operationsverstärker und Brücken-T-Mitkopplung, G. Krucker 2002,
- [KRU02-2] Inverse Tschebyscheff Tiefpassfilter, G. Krucker 2002, Download von www.krucker.ch
- [SCH01] Design of Analog Filters, R. Schaumann/ M. E. van Valkenburg, Oxford University Press 2001, ISBN 0-19-511877-4
- [ZVE67] Handbook of Filter Synthesis, A. Zverev, John Wiley & Sons 1967, ISBN 0-461-98680-1