

Numerische Integration nach Simpson

Umfeld

Für die Praxis bietet die numerische Integration mit der Simpson-Regel meist genügend Genauigkeit. Das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ wird mit der Simpson-Regel folgendermassen berechnet:

$$I = S(n) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) \quad c = \begin{cases} 1 & i = 0 \text{ oder } i = n \\ 2 & i \text{ gerade, aber } i \neq 0, n \\ 4 & i \text{ ungerade} \end{cases}$$
$$n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Einen möglichen Ansatz zur programmtechnischen Realisierung ist im Skript IAM gezeigt.

Der maximale Fehler kann mit der Fehlerformel für eine Parabel-Teilfläche abgeschätzt werden:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max |f^{(4)}|$$

Aufgaben

- Bestimmen Sie den Wert für $\int_{-1}^2 |x^5| + 2 dx$ mit einer äquidistanten Zerlegung $n=6$ nach dem Simpson-Verfahren.
- Bestimmen Sie den maximalen Fehler der Berechnung in 1.). Kontrollieren Sie Ihre Fehlerrechnung indem Sie mit einer Excel-Tabelle die Berechnung für die Zerlegungen $n=4$, $n=6$, $n=10$ und $n=100$ durchführen.

- Erstellen Sie ein Programm, das den Wert der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ für einen gegebenen Wert } x \text{ mit Hilfe der Simpson-Regel bestimmt.}$$

Verwenden Sie zur Berechnung eine Zerlegung $n=20$, die 10 Teilflächen entspricht.

Die Integrationsfunktion ist als C-Funktion zu entwickeln. Sie wird aus dem Hauptprogramm aufgerufen. Als Argumente werden die Intervallgrenzen und die gewünschte Zerlegung mitgegeben. Der Funktionswert liefert als Resultat das bestimmte Integral zurück.

```
double simpson(double a, double b, int n)
{
    ....
    ....
    return Sn;
}
```

- Erweitern Sie das Programm so, dass eine Tabelle mit Werten der standardisierten Normalverteilung ausgegeben wird. Ein mögliche Ausgabe ist umseitig gezeigt.

Berechnen der Standard-Normalverteilung in 0.01 Schritten für das Intervall [0..3.99]:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.10	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.20	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.30	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.40	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.50	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.60	0.2257	0.2291	0.2324	0.2356	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.70	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2703	0.2734	0.2764	0.2793	0.2823	0.2852
0.80	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.90	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3364	0.3389
1.00	0.3413	0.3437	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.10	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3728	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.20	0.3849	0.3868	0.3888	0.3906	0.3925	0.3943	0.3962	0.3979	0.3997	0.4015
1.30	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4146	0.4162	0.4177
1.40	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4278	0.4292	0.4305	0.4319
1.50	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.60	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.70	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4624	0.4633
1.80	0.4641	0.4648	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4685	0.4692	0.4699	0.4706
1.90	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.00	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.10	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.20	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4874	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.30	0.4893	0.4895	0.4898	0.4901	0.4903	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.40	0.4918	0.4920	0.4922	0.4924	0.4926	0.4928	0.4930	0.4932	0.4934	0.4936
2.50	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4944	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.60	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4958	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.70	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.80	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.90	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.00	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.20	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.30	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996
3.40	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.50	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.60	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.70	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.80	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.90	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000