U5 Lineare Gleichungssysteme, Gauss Jordan

Umfeld

Der Gauss-Jordan Algorithmus dient dazu um die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems in Dreieckform zu bringen.

Dazu werden drei Elementaroperationen zur Umformung verwendet:

- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition zweier Zeilen
- Vertauschen zweier Zeilen

Aufgaben

1. Lösen Sie mit Hilfe des Gauss-Jordan Algorithmus das nachfolgende Gleichungssystem: Praktizieren Sie sowohl die Methode des Rückwärtseinsetzens wie auch die Methode "Gauss-Rückwärts" um alle Unbekannten zu bestimmen.:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & - & z & = & 16 \end{array}$$

2. Für welche Werte von α, β hat das System

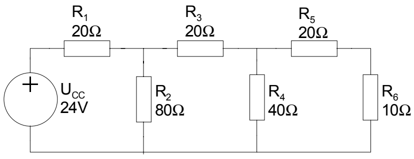
$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & \beta \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

   a.) keine Lösung
   b.) unendlich viele Lösungen
   c.) genau eine Lösung

3. Wie sehen die auf Dreieckform reduzierten, erweiterten Koeffizientenmatrizen vom Charakter her aus, wenn

   (a) mehrere, (b) genau eine, (c) keine Lösungen existieren?

4. Bestimmen Sie alle Ströme indem Sie die zum System gehörende erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen und mit Gauss-Jordan lösen.



Kontrollieren Sie Ihr Resultat indem sie mit dem Taschenrechner die inverse Koeffizientenmatrix bestimmen und die Lösung über den Ansatz $\underline{x}=A^{-1}\cdot\underline{b}$ bestimmen.

5. Hat ein Gleichungssystem mit n Bestimmungsgleichungen nur m Unbekannte ($m< n$), so können falls die Bestimmungsgleichungen weder widersprüchlich noch linear abhängig sind, (n-m) Variablen als Lösung frei gewählt werden. Zweckmässigerweise ordnet man diesen Lösungen den Wert 0 zu. Geometrisch gesehen, spannen die gewählten Variablen einen (n-m)- dimensionalen Lösungsraum auf.

Finden Sie für das folgende unterbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

a.) eine mögliche Lösung
b.) den Lösungsraum als Vektorfunktion mit n Komponenten