

Ausgleichs- und Interpolationsrechnung I (Lösungen)

1. Bestimmen Sie mittels linearer Regression den Innenwiderstand R_i der Transformatorquelle, wenn folgende Messwerte vorliegen:

U_{sek} [V]	I_{sek} [mA]
9.43	40.78
9.38	57.0
9.27	101.4
9.165	141.45
9.05	198.65
8.90	251.03
8.52	405.8

Beurteilen Sie ferner die Güte der so erhaltenen Ausgleichsfunktion!

Lösung:

Aus dem Skript kennen wir die Formel zur Bestimmung der Steigung und Achsenabschnittes für die lineare Regressionsfunktion $y_i = ax_i + b$, sowie den Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Wesentlich ist bei dieser Aufgabe was als X und was als Y betrachtet wird. Bezogen auf die Fragestellung $R_i = U/I$ erscheint I_i als x_i und U_i als y_i als sinnvolle Festlegung.

Wir bilden zuerst die Summen und setzen nachher in die Formeln ein:

$$\sum X = 40.78 + 57.0 + 101.4 + 141.45 + 198.65 + 251.03 + 405.8 = 1196.11$$

$$\sum X^2 = 40.78^2 + 57.0^2 + 101.4^2 + 141.45^2 + 198.65^2 + 251.03^2 + 405.8^2 = 302353.5943$$

$$\sum Y = 9.43 + 9.38 + 9.27 + 9.165 + 9.05 + 8.90 + 8.52 = 63.715$$

$$\sum Y^2 = 9.43^2 + 9.38^2 + 9.27^2 + 9.165^2 + 9.05^2 + 8.90^2 + 8.52^2 = 580.542325$$

$$\sum XY = 9.43 \cdot 40.78 + 9.38 \cdot 57.0 + 9.27 \cdot 101.4 + 9.165 \cdot 141.45 + 9.05 \cdot 198.65 + 8.90 \cdot 251.03 + 8.52 \cdot 405.8 = 10644.94815$$

$$n = 7$$

$$b = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{63.715 \cdot 302353.5943 - 1196.11 \cdot 10644.94815}{7 \cdot 302353.5943 - 1196.11^2} = 9.524596 \rightarrow 9.525V$$

$$a = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{7 \cdot 10644.94815 - 1196.11 \cdot 63.715}{7 \cdot 302353.5943 - 1196.11^2} = -2.472326 \cdot 10^{-3} \rightarrow 2.472\Omega$$

$$r_{xy} = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X^2 - (\sum X)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} = \frac{7 \cdot 10644.94815 - 1196.11 \cdot 63.715}{\sqrt{(7 \cdot 302353.5943 - 1196.11^2)(7 \cdot 580.542325 - 63.715^2)}} = -0.99962$$

Da der Korrelationskoeffizient fast $= |1|$ ist, kann von einem ausgezeichneten Ausgleich gesprochen werden.

2. Eine Ge-Goldraht-Diode AA143 wird im Katalog mit der unten gezeigten Kennlinie spezifiziert. Bestimmen Sie die Parameter I_s und n für das Shockley-Modell mit Hilfe von 4 Werten (I_d bei

äquidistanten $U_D = 0.2V, \dots, 0.5V$, die Sie aus dem Diagramm entnehmen.

Lösung:

Das Shockley-Modell verkörpert in der vereinfachten Form eine Exponentialfunktion des Typs $Y = ae^{bX}$. Die Vereinfachung ist zulässig, da alle X-Werte $\gg U_T$ sind. Die Exponentialfunktion dieses Typs kann durch Logarithmieren in eine lineare Regression übergeführt werden:

$$Y = be^{aX} \quad \rightarrow \ln Y = \ln b + aX \quad \rightarrow Z = B + bX \quad \text{Substitutionen: } \begin{matrix} Z = \ln Y \\ B = \ln b \end{matrix}$$

Wir lesen aus dem Diagramm die Werte:

U_D [V]	0.2	0.3	0.4	0.5
I_D [mA]	0.2	1.8	8	30

Die zugehörige lineare Regression wird:

$$Z = \ln Y = \ln I \quad X = U$$

$$\sum X = 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 = 1.4$$

$$\sum X^2 = 0.2^2 + 0.3^2 + 0.4^2 + 0.5^2 = 0.54$$

$$\sum Z = \ln 0.0002 + \ln 0.0018 + \ln 0.008 + \ln 0.03 = -23.172$$

$$\sum XZ = 0.2 \cdot \ln 0.0002 + 0.3 \cdot \ln 0.0018 + 0.4 \cdot \ln 0.008 + 0.5 \cdot \ln 0.03 = -7.284$$

$$n = 4$$

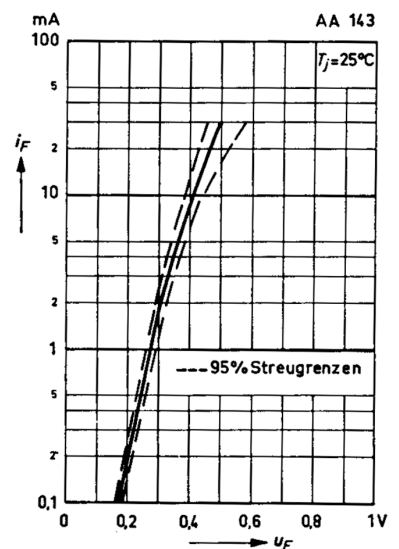
$$B = \frac{\sum Z (\sum X^2) - (\sum X) (\sum XZ)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{(-23.172) \cdot 0.54 - 1.4 \cdot (-7.284)}{4 \cdot 0.54 - 1.4^2} = -11.584$$

$$a = \frac{n \sum XZ - (\sum X) \sum Z}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{4 \cdot (-7.284) - 1.4 \cdot (-23.172)}{4 \cdot 0.54 - 1.4^2} = 16.624$$

$$B = \ln b \quad b = e^B = 9.309 \cdot 10^{-6} \quad \rightarrow I_S = 9.3 \mu A$$

$$b = \frac{1}{nU_T} \quad \rightarrow n = \frac{1}{bU_T} = \frac{1}{16.624 \cdot 0.026} = 2.3136$$

Durchlaßkennlinie
 $T_j = 25^\circ C$



Quelle:
ITT Internmetall
Datenbuch Dioden 1971/72

4. Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Regressionsfunktion eine einfache, stetige Funktion, die den Kapazitätsverlauf der Sperrschichtkapazität C_s für die Diode BB609A beschreibt. Ausgangslage bilden die Werte für C_s bei $-U_D = \{0.5, 1, 2, 5, 10\}$ V.

Lösung:

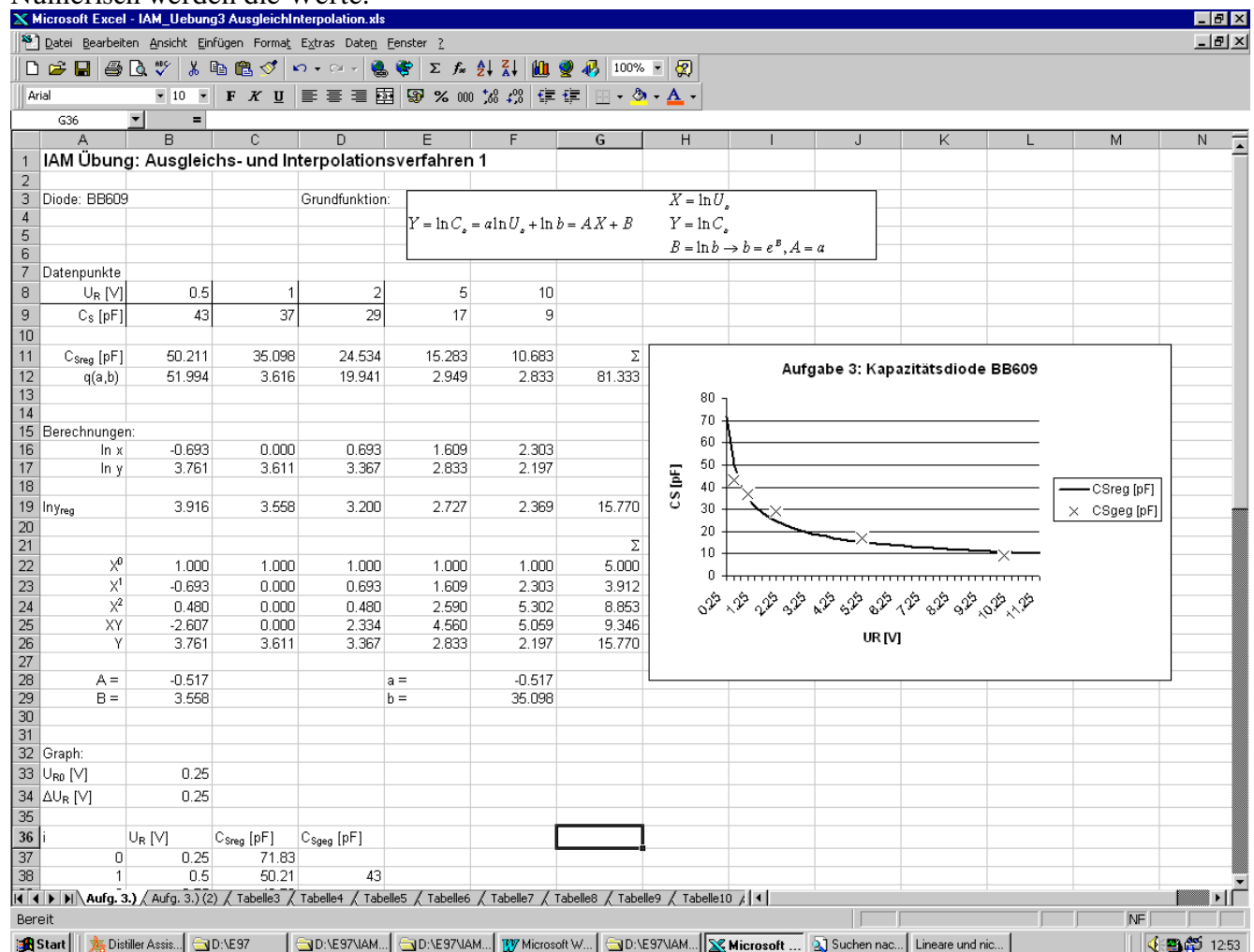
Aus der Mikroelektronik kennen wir den charakteristischen Kapazitätsverlauf einer Kapazitätsdiode. Es ist eine Funktion der Art:

$$C_s \approx C_0 \frac{1}{\sqrt{U_s}} \approx b \cdot (U_s)^a$$

Die Potenzfunktion lässt sich durch Logarithmieren in eine äquivalent lineare Regressionsaufgabe überführen:

$$\begin{aligned} X &= \ln U_s \\ Y &= \ln C_s = a \ln U_s + \ln b = AX + B \\ B &= \ln b \rightarrow b = e^B, A = a \end{aligned}$$

Numerisch werden die Werte:



Man stellt fest, dass dies nicht die fehlerquadratminimale Ausgleichsfunktion sein kann, da z.B. ein $a=0.5$ bereits eine kleinere Fehlerquadratsumme liefert.

Mit dem Solver von EXCEL findet man die optimalen Werte:

