

## FIR Bandpassdimensionierung mit Window-Methode

Bestimmung der idealen und gewichteten FIR-Filterkoeffizienten für einen Bandpass nach der Window-Methode.

Autor: Gerhard Krucker  
Zaunackerstrasse 9  
3113 Rubigen (Schweiz)  
krucker@krucker.ch

(c) Gerhard Krucker, Verwendung mit nur mit Zustimmung und Quellenangabe erlaubt.  
Datum: 16.12.2000, 23.12.2000 (Korr. Windowfunkt.)

### Vorgaben:

$f_S := 16 \cdot 10^3$  [Hz]      Sampling Frequenz  
 $f_{C1} := 1 \cdot 10^3$  [Hz]      Untere Grenzfrequenz Durchlass  
 $f_{C2} := 2 \cdot 10^3$  [Hz]      Obere Grenzfrequenz Durchlass  
 $N := 91$       Anzahl Taps

(Zu kleine Filterlängen führen dazu, dass bei den Fenstern mit hoher Sperrdämpfung die geforderte Sperrdämpfung nicht erreicht wird.)

### Berechnungen:

$\omega_{C1} := 2\pi \cdot f_{C1}$        $\omega_{C2} := 2\pi \cdot f_{C2}$   
 $\Omega_{C1} := \frac{\omega_{C1}}{f_S}$        $\Omega_{C1} = 0.393$       Normierte untere Grenzfrequenzen des idealen Filters  
 $\Omega_{C2} := \frac{\omega_{C2}}{f_S}$        $\Omega_{C2} = 0.785$       Normierte obere Grenzfrequenzen des idealen Filters

$$h_{BP}(i, \Omega_{C1}, \Omega_{C2}, N) := \begin{cases} \frac{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}}{\pi} & \text{if } i = \frac{N-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C2}\right] - \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C1}\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ideale Bandpass} \\ \text{FIR-Filterkoeffizienten} \end{array}$$

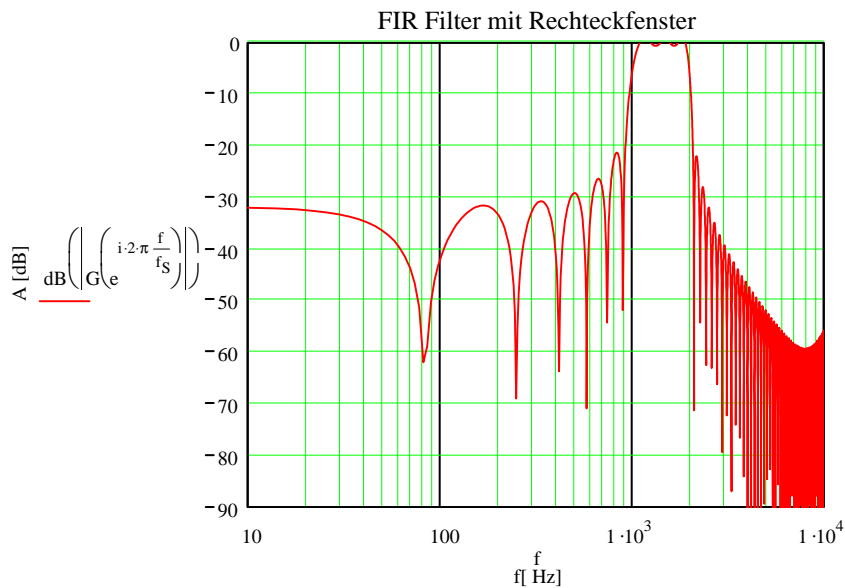
$i := 0..N-1$

$h_{1_i} := h_{BP}(i, \Omega_{C1}, \Omega_{C2}, N)$       Ideale Filterkoeffizienten

$$f_m := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}}$$

## Rechteck-Fenster: (Sperrdämpfung >21dB)

$$f := 10, 14.. 10000 :] \quad G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{1_k} \cdot z^{-k} \quad \text{Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion} \quad \text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$$

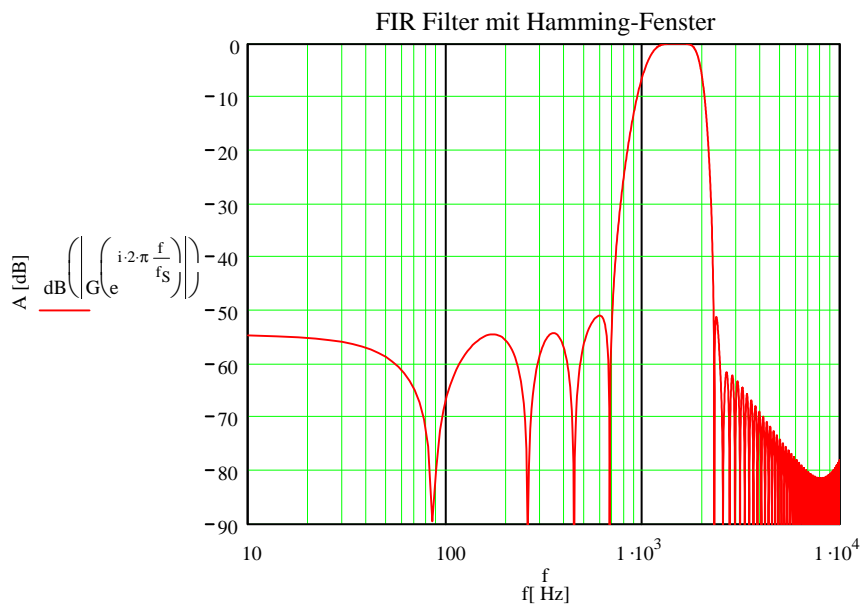


$$\text{dB} \left( \left| G \left( e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_s}} \right) \right| \right) = 8.078 \times 10^{-3} \text{ [dB]} \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_m$$

## Hamming-Fenster: (Sperrdämpfung > 53dB)

$$h_{2_i} := \text{hammingWin}(i, N) \cdot h_{1_i} \quad \text{Hamming-gewichtete Filterkoeffizienten}$$

$$f := 10, 14.. 10000 \text{ [Hz]} \quad G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k} \quad \text{Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion}$$



$$\text{dB} \left( \left| G \left( e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_s}} \right) \right| \right) = 0.019 \text{ [dB]} \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_m$$

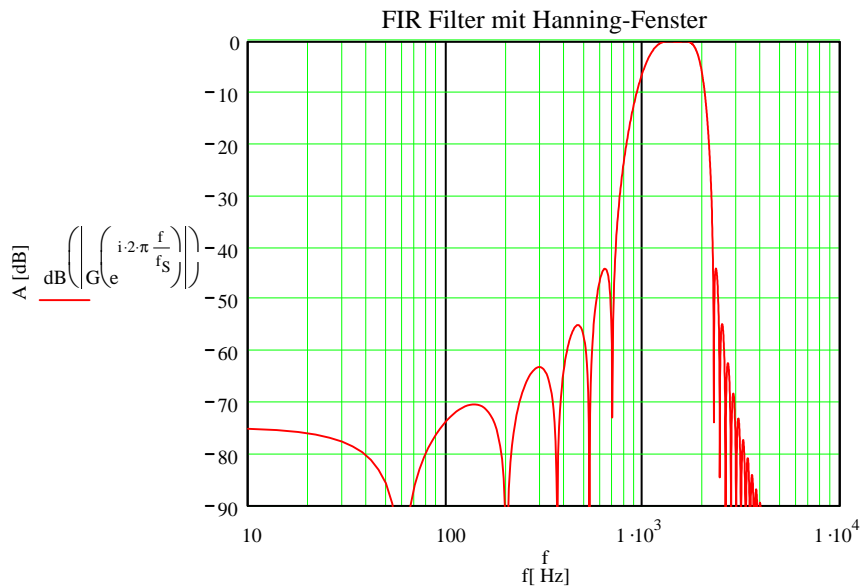
### Hanning-Fenster: (Sperrdämpfung > 44dB)

$$h_{2_i} := \text{hanningWin}(i, N) \cdot h_{1_i}$$

Hanning-gewichtete Filterkoeffizienten

$$f := 10, 14.. 10000 \text{ [Hz]}$$

$$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k} \quad \text{Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion}$$



$$20 \cdot \log_{10} \left| G \left( e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}} \right) \right| = 0.02 \quad \text{[dB]} \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_m$$

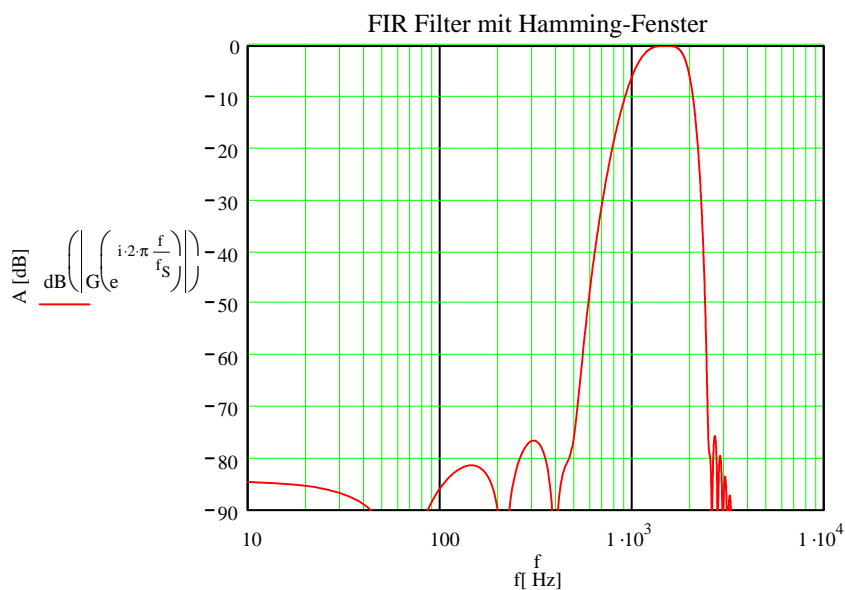
### Blackman-Fenster: (Sperrdämpfung >74dB)

$$h_{2_i} := \text{blackmanWin}(i, N) \cdot h_{1_i}$$

Blackman-gewichtete Filterkoeffizienten

$$f := 10, 14.. 10000 \text{ [Hz]}$$

$$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k} \quad \text{Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion}$$



$$20 \cdot \log_{10} \left| G \left( e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}} \right) \right| = -0.023 \quad \text{[dB]} \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_m$$

### Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >70dB)

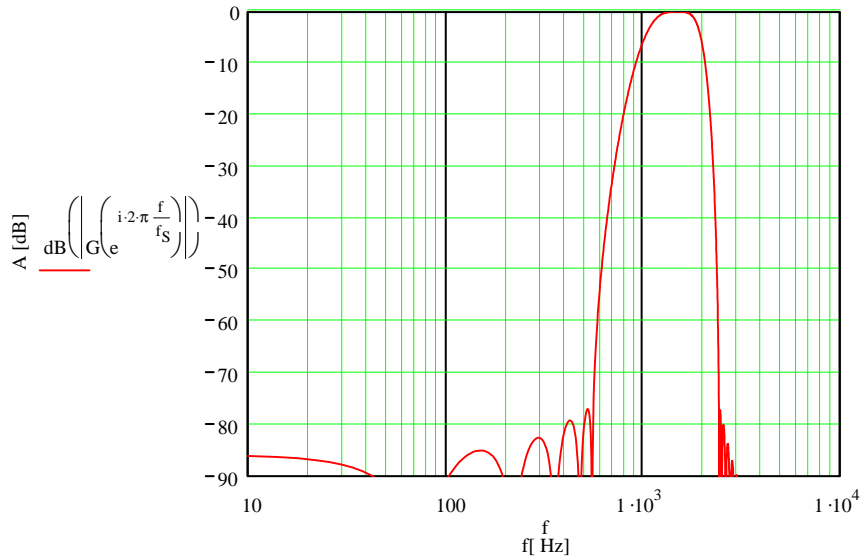
$$h_{2_i} := \text{kaiserWin}(i, N, 7.76) \cdot h_{1_i}$$

Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$$f := 10, 14.. 10000 \text{ [Hz]}$$

$$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k} \quad \text{Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion}$$

FIR Filter mit Kaiser-Fenster



$$\text{dB} \left( \left| G \left( e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_s}} \right) \right| \right) = -7.744 \times 10^{-3} \text{ [dB]} \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_m$$

### Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >50dB)

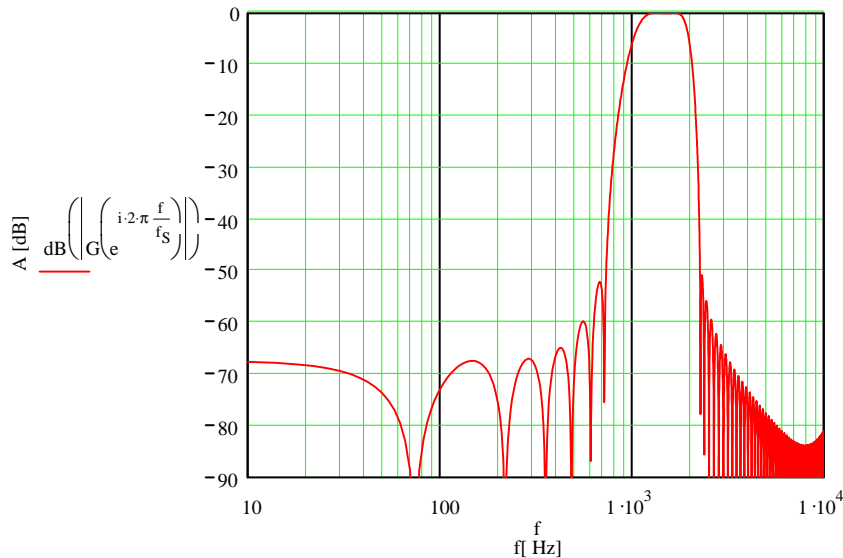
$$h_{2_i} := \text{kaiserWin}(i, N, 4.54) \cdot h_{1_i}$$

Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$$f := 10, 14.. 10000 \text{ [Hz]}$$

$$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k} \quad \text{Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion}$$

FIR Filter mit Kaiser-Fenster



$$\text{dB} \left( \left| G \left( e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_s}} \right) \right| \right) = 3.819 \times 10^{-4} \text{ dB} \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_m$$

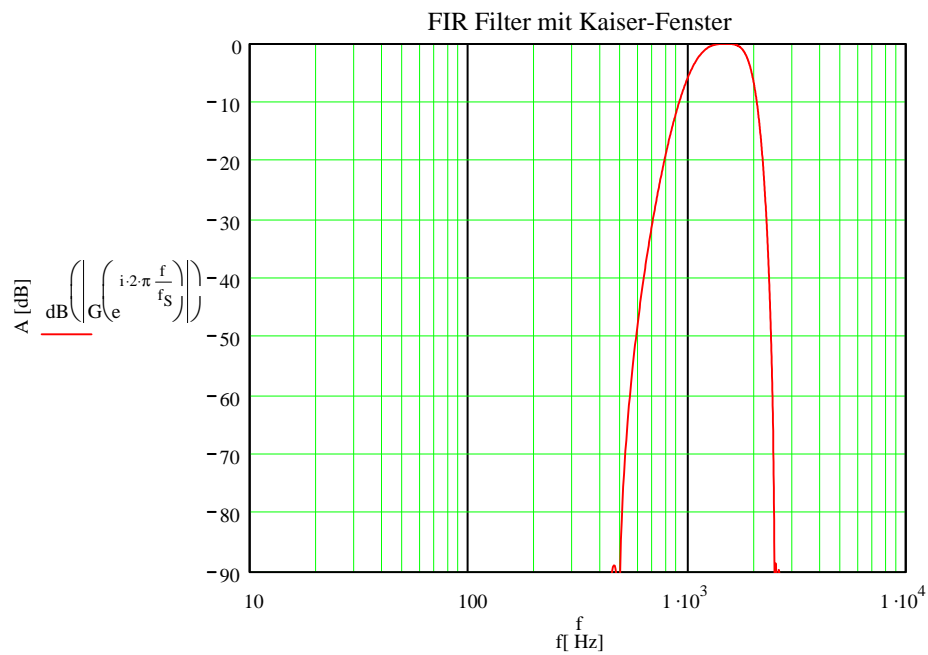
## Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >90dB)

$$h_{2_i} := \text{kaiserWin}(i, N, 8.96) \cdot h_{1_i}$$

Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$$f := 10, 14 \dots 10000 \text{ [Hz]}$$

$$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k} \quad \text{Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion}$$



$$20 \log_{10} \left| G \left( e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_s}} \right) \right| = -0.03 \quad \text{[dB]} \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_m$$

Fenster	Sperrdämpfung [dB]	k
Rechteck	21	2.0
Bartlett	25	4.0
Hanning	44	4.0
Hamming	53	4.0
Blackman	74	6.0
Kaiser (gamma=2.12)	30	1.54
Kaiser (gamma=4.54)	50	2.93
Kaiser (gamma=7.76)	70	4.32
Kaiser (gamma=8.96)	90	5.71

### Fensterfunktionen

$$\text{blackmanWin}(i, N) := 0.42 + 0.5 \cdot \cos\left[\frac{2\pi \cdot \left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right] + 0.08 \cdot \cos\left[\frac{4\pi \cdot \left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\text{hammingWin}(i, N) := 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left[\frac{2\pi \cdot \left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\text{bartlettWin}(i, N) := 1 - 2 \cdot \frac{\left|i - \frac{N-1}{2}\right|}{N-1}$$

$$\text{hanningWin}(i, N) := 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left[\frac{2\pi \cdot \left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\text{rectWin}(i, N) := 1$$

$$\text{kaiserWin}(i, N, \gamma) := \frac{I_0\left[2 \cdot \frac{\gamma \cdot \sqrt{i \cdot (N-i-1)}}{N-1}\right]}{I_0(\gamma)}$$

### Ideale Filterkoeffizienten

$$h_{\text{BP}}(i, \Omega_{C1}, \Omega_{C2}, N) := \begin{cases} \frac{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}}{\pi} & \text{if } i = \frac{N-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C2}\right] - \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C1}\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h_{\text{BS}}(i, \Omega_{C1}, \Omega_{C2}, N) := \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_{C2} + \Omega_{C1}}{\pi} & \text{if } i = \frac{N-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi\right] - \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C2}\right] + \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C1}\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$