FIR Bandsperrendimensionierung mit Window-Methode

Bestimmung der idealen und gewichteten FIR-Filterkoeffizienten für eine Bandsperre nach der Window-Methode.

Autor: Gerhard Krucker
Zaunackerstrasse 9
3113 Rubigen (Schweiz)
krucker@krucker.ch

Datum: 16.12.2000, 23.12.2000 (Korr. Windowfunkt.)

Vorgaben:

$f_S := 16 \cdot 10^3$ [Hz] Sampling Frequenz

$f_{C1} := 1 \cdot 10^3$ [Hz] Untere Grenzfrequenz Durchlass

$f_{C2} := 5 \cdot 10^3$ [Hz] Obere Grenzfrequenz Durchlass

$N := 61$ Anzahl Taps (Ordnung+1)

(Zu kleine Filterlängen führen dazu, dass bei den Fenstern mit hoher Sperrdämpfung die geforderte Sperrdämpfung nicht erreicht wird.)

Berechnungen:

$\omega_{C1} := 2\pi \cdot f_{C1}$ $\omega_{C2} := 2\pi \cdot f_{C2}$

$\Omega_{C1} := \frac{\omega_{C1}}{f_S}$ $\Omega_{C1} = 0.393$ Normierte untere Grenzfrequenzen des idealen Filters

$\Omega_{C2} := \frac{\omega_{C2}}{f_S}$ $\Omega_{C2} = 1.963$ Normierte obere Grenzfrequenzen des idealen Filters

Ideale Bandsperre FIR-Filterkoeffizienten

$$h_{BS}(i, \Omega_{C1}, \Omega_{C2}, N) := \begin{cases} \dfrac{\pi - \Omega_{C2} + \Omega_{C1}}{\pi} & \text{if } i = \dfrac{N-1}{2} \\ \dfrac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi\right] - \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C2}\right] + \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C1}\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{other} \end{cases}$$

$i := 0 .. N - 1$

$h1_i := h_{BS}(i, \Omega_{C1}, \Omega_{C2}, N)$

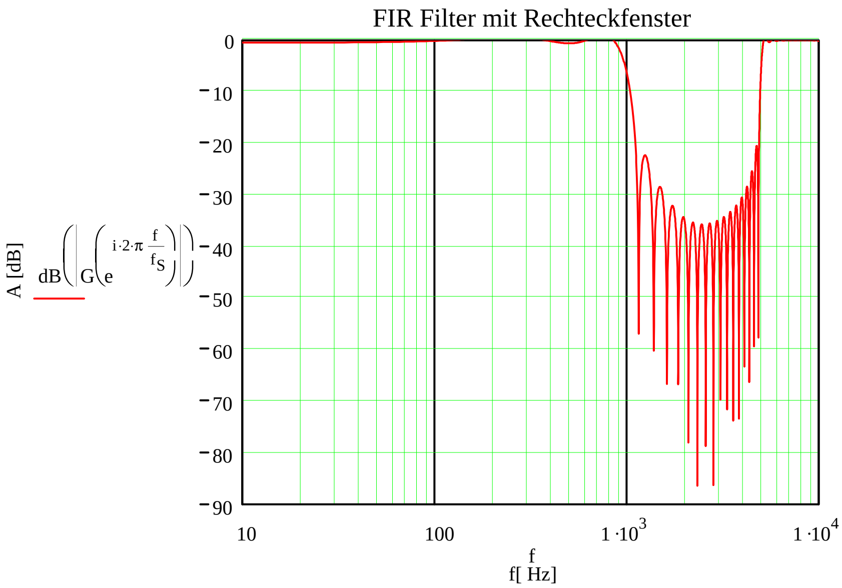
$Sh_1 := \sum_i h1_i$ $Sh_1 = 0.946$ DC-Dämpfung

$Sh_2 := \sum_i (-1)^i h1_i$ $Sh_2 = 0.998$ Dämpfung bei $f_S/2$

$f_m := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}}$

Rechteck-Fenster: (Sperrdämpfung >21dB)

$f := 10, 14 .. 10000$:] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h1_k \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion $dB(x) := 20 \cdot \log(x)$

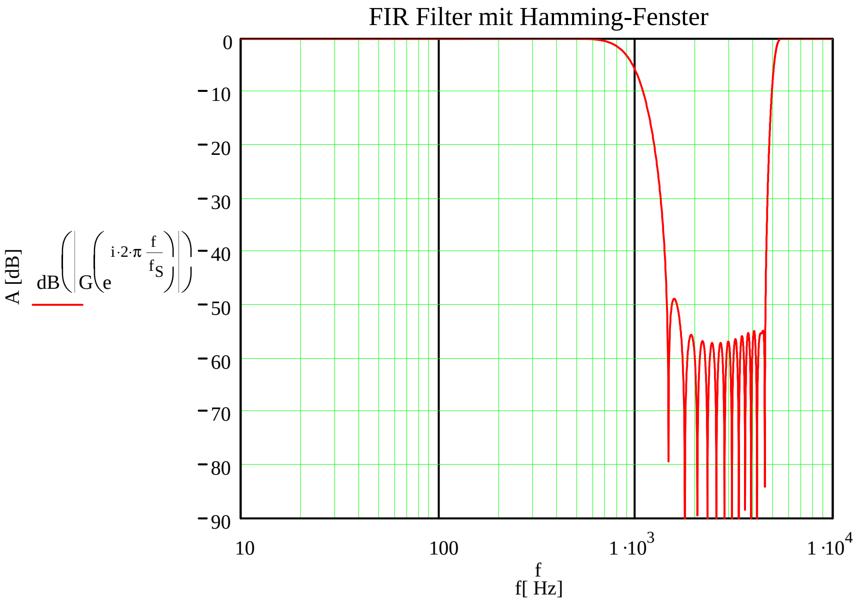


$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}}\right)\right|\right) = -35.819$ [dB] Dämpfung bei Mittenfrequenz f_m

Hamming-Fenster: (Sperrdämpfung > 53dB)

$h2_i := \mathrm{hammingWin}(i, N) \cdot h1_i$ Hamming-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h2_k \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion

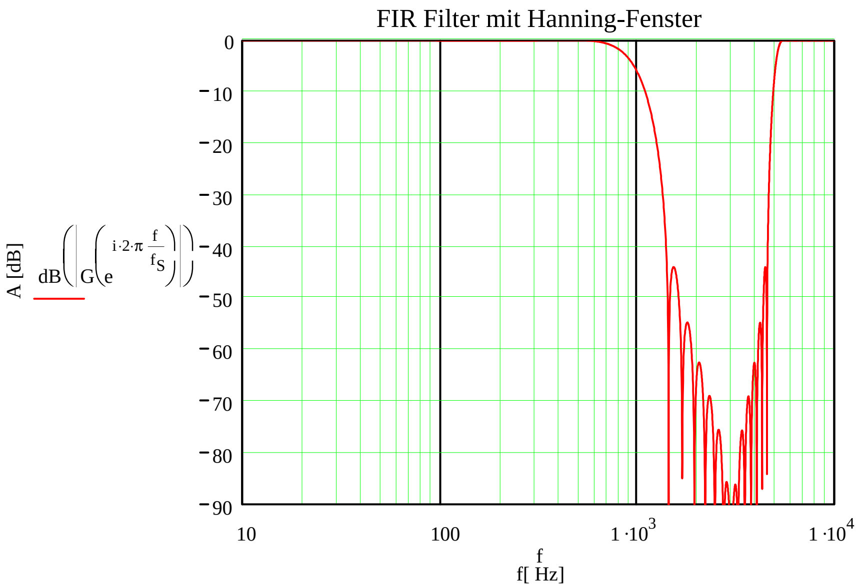


$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}}\right)\right|\right) = -58.523$ [dB] Dämpfung bei Mittenfrequenz f_m

Hanning-Fenster: (Sperrdämpfung > 44dB)

$h_{2_i} := \mathrm{hanningWin}(i, N) \cdot h_{1_i}$ Hanning-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion

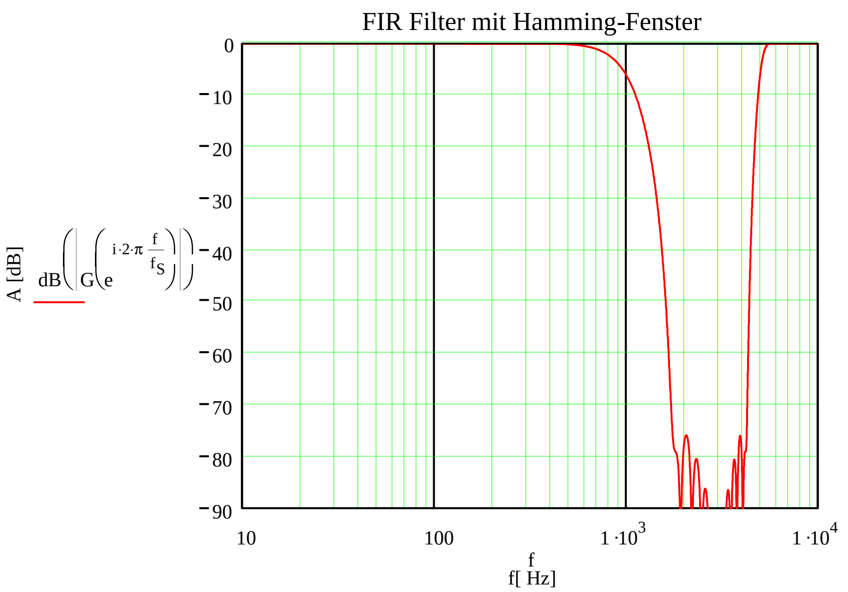


$\mathrm{dB}\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}}\right)\right|\right) = -78.511$ [dB] Dämpfung bei Mittenfrequenz f_m

Blackman-Fenster: (Sperrdämpfung >74dB)

$h_{2_i} := \mathrm{blackmanWin}(i, N) \cdot h_{1_i}$ Blackman-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion

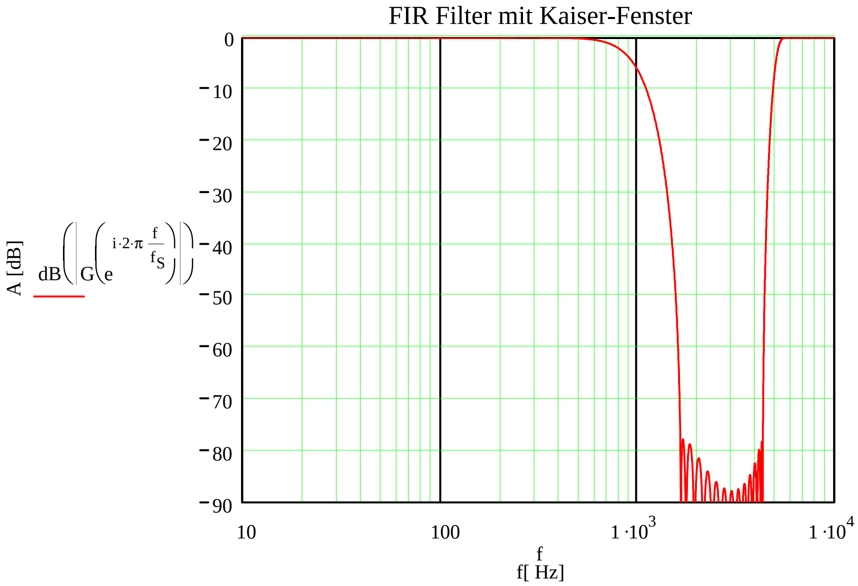


$\mathrm{dB}\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}}\right)\right|\right) = -88.274$ [dB] Dämpfung bei Mittenfrequenz f_m

Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >70dB)

$h2_i := \mathrm{kaiserWin}(i, N, 7.76) \cdot h1_i$ Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h2_k \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion

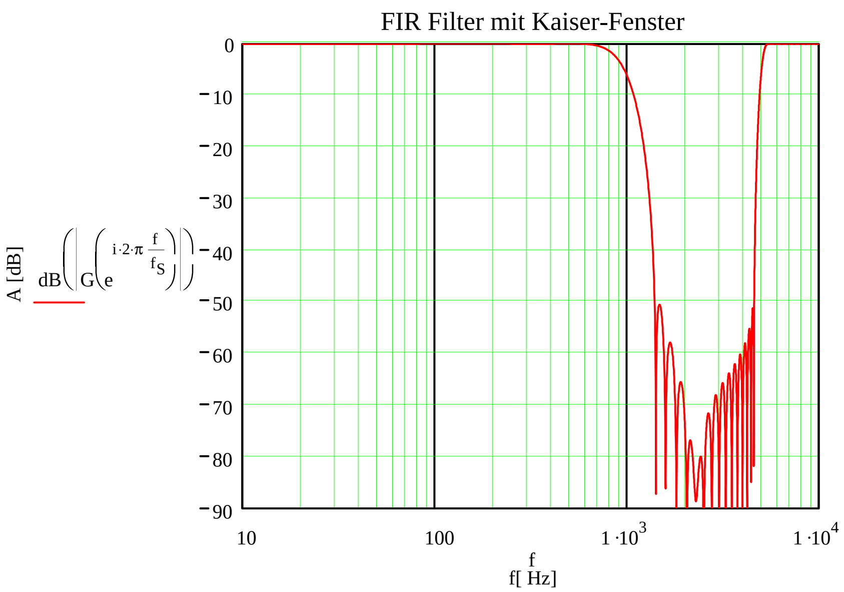


$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}}\right)\right|\right) = -85.681$ [dB] Dämpfung bei Mittenfrequenz f_m

Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >50dB)

$h2_i := \mathrm{kaiserWin}(i, N, 4.54) \cdot h1_i$ Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h2_k \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion

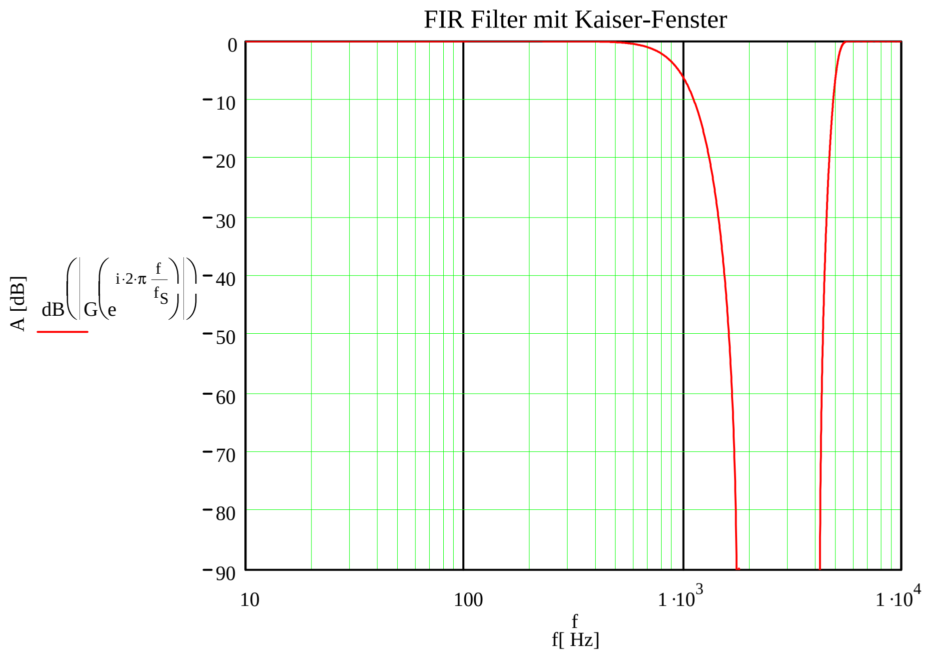


$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}}\right)\right|\right) = -83.715$ [dB] Dämpfung bei Mittenfrequenz f_m

Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >90dB)

$h_{2_i} := \text{kaiserWin}(i, N, 8.96) \cdot h_{1_i}$ Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion



$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_m}{f_S}}\right)\right|\right) = -103.094$ [dB] Dämpfung bei Mittenfrequenz f_m

$h_2 =$

	0
0	$-1.425 \cdot 10^{-5}$
1	$-3.836 \cdot 10^{-5}$
2	0
3	$-1.524 \cdot 10^{-4}$
4	$-2.799 \cdot 10^{-4}$
5	$1.709 \cdot 10^{-4}$
6	0
7	$-3.818 \cdot 10^{-4}$
8	$1.42 \cdot 10^{-3}$
9	$1.821 \cdot 10^{-3}$
10	0
11	$3.297 \cdot 10^{-3}$
12	$4.678 \cdot 10^{-3}$
13	$-2.313 \cdot 10^{-3}$
14	0
15	$3.725 \cdot 10^{-3}$
16	-0.012
17	-0.014
18	0
19	-0.021
20	-0.028

Kaiser-Filterkoeffizienten

Fenster	Sperrdämpfung [dB]	k
Rechteck	21	2.'0
Bartlett	25	4.0
Hanning	44	4.0
Hamming	53	4.0
Blackman	74	6.0
Kaiser (gamma=2.12)	30	1.54
Kaiser (gamma=4.54)	50	2.93
Kaiser (gamma=7.76)	70	4.32
Kaiser (gamma=8.96)	90	5.71

Fensterfunktionen

$$\mathrm{blackmanWin}(i,N) := 0.42 + 0.5\cdot\cos\left[\frac{2\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right] + 0.08\cdot\cos\left[\frac{4\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\mathrm{hammingWin}(i,N) := 0.54 + 0.46\cdot\cos\left[\frac{2\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\mathrm{bartlettWin}(i,N) := 1 - 2\cdot\frac{\left|i - \frac{N-1}{2}\right|}{N-1}$$

$$\mathrm{hanningWin}(i,N) := 0.5 + 0.5\cdot\cos\left[\frac{2\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\mathrm{rectWin}(i,N) := 1$$

$$\mathrm{kaiserWin}(i,N,\gamma) := \frac{\mathrm{I0}\left[2\cdot\frac{\gamma\cdot\sqrt{i\cdot(N-i-1)}}{N-1}\right]}{\mathrm{I0}(\gamma)}$$

Ideale Filterkoeffizienten

:wis

$$h_{BP}(i,\Omega_{C1},\Omega_{C2},N) := \begin{cases} \frac{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}}{\pi} & \text{if } i = \frac{N-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C2}\right] - \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C1}\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h_{BS}(i,\Omega_{C1},\Omega_{C2},N) := \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_{C2} + \Omega_{C1}}{\pi} & \text{if } i = \frac{N-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi\right] - \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C2}\right] + \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_{C1}\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{othe} \end{cases}$$