FIR Tiefpassdimensionierung mit Window-Methode

Bestimmung der idealen und gewichteten FIR-Filterkoeffizienten für einen Tiefpass nach der Window-Methode.

Autor: Gerhard Krucker
Zaunackerstrasse 9
3113 Rubigen (Schweiz)
krucker@krucker.ch

Datum: 14.12.2000, 23.12.2000 (Korr. Windowfunkt.)

Vorgaben:

$f_S := 9.6\cdot 10^3$ Hz] Sampling Frequenz

$f_C := 1\cdot 10^3$ Hz] Grenzfrequenz Durchlass

$N := 21$ Anzahl Taps (Ordnung+1)

(Zu kleine Filterlängen führen dazu, dass bei den Fenstern mit hoher Sperrdämpfung die geforderte Sperrdämpfung nicht erreicht wird.)

Berechnungen:

$\omega_C := 2\pi\cdot f_C$

$\Omega_C := \dfrac{\omega_C}{f_S}$ $\Omega_C = 0.654$ Normierte Grenzfrequenz des idealen Filters

$$h_{LP}(i,\Omega_C,N) := \begin{cases} \dfrac{\Omega_C}{\pi} & \text{if } i = \dfrac{N-1}{2} \\ \dfrac{\sin\left[\left(i-\dfrac{N-1}{2}\right)\Omega_C\right]}{\left(i-\dfrac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ideale Tiepfass FIR-Filterkoeffizienten

$i := 0 .. N-1$

$h1_i := h_{LP}(i,\Omega_C,N)$

$Sh1 := \sum_i h1_i$ $Sh1 = 0.918$ DC-Dämpfung

$Sh2 := \sum_i (-1)^i h1_i$ $Sh2 = 0.018$ Dämpfung bei $f_S/2$

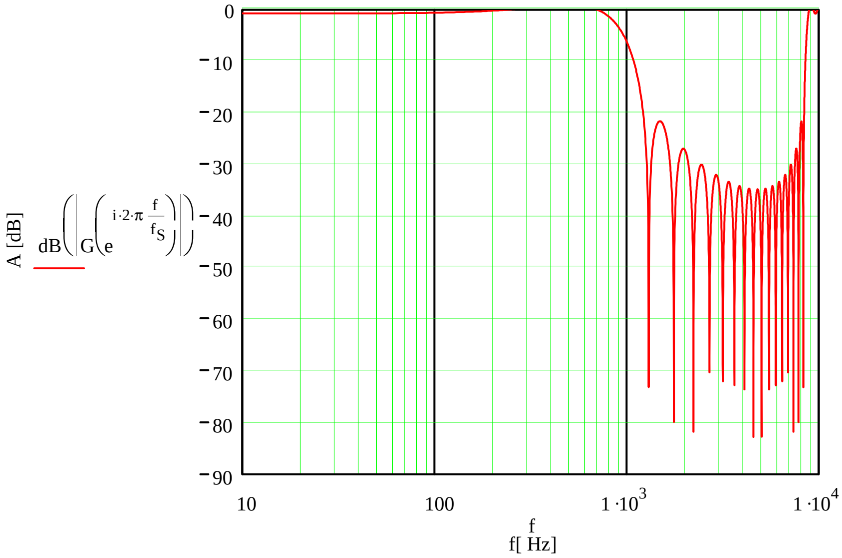
$h1 =$

	0
0	$8.238\cdot 10^{-3}$
1	-0.014
2	-0.034
3	-0.045
4	-0.038
5	$-8.31\cdot 10^{-3}$
6	0.04
7	0.098
8	0.154
9	0.194
10	0.208
11	0.194
12	0.154
13	0.098
14	0.04
15	$-8.31\cdot 10^{-3}$
16	-0.038
17	-0.045
18	-0.034
19	-0.014
20	$8.238\cdot 10^{-3}$

Rechteck-Fenster: (Sperrdämpfung >21dB)

$f := 10, 14 .. 10000$:] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{1_k} \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion $dB(x) := 20 \cdot \log(x)$

FIR Filter mit Rechteckfenster



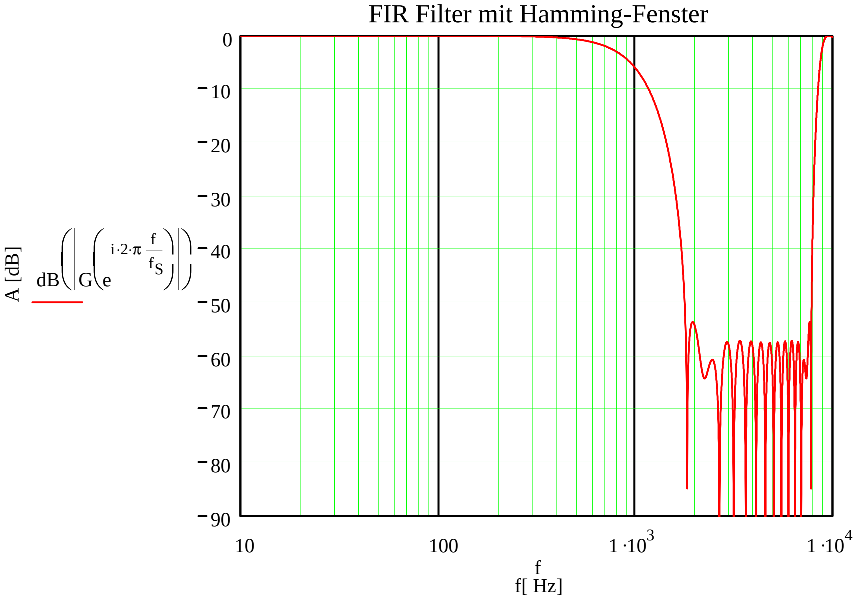
$$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_C}{f_S}}\right)\right|\right) = -6.211$$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_C

Hamming-Fenster: (Sperrdämpfung > 53dB)

$h_{2_i} := \mathrm{hammingWin}(i, N) \cdot h_{1_i}$ Hamming-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion

FIR Filter mit Hamming-Fenster

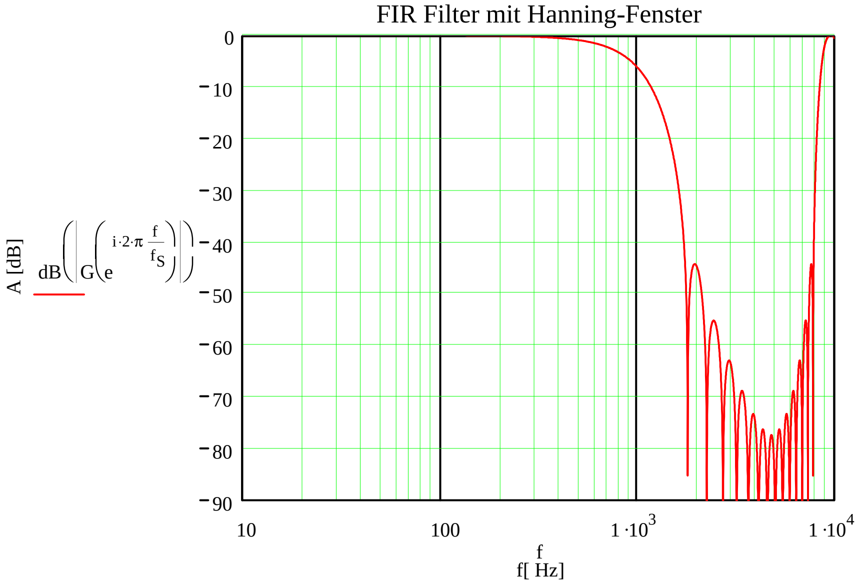


$$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_C}{f_S}}\right)\right|\right) = -6.025$$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_C

Hanning-Fenster: (Sperrdämpfung > 44dB)

$h2_i := \text{hanningWin}(i, N) \cdot h1_i$ Hanning-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h2_k \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion

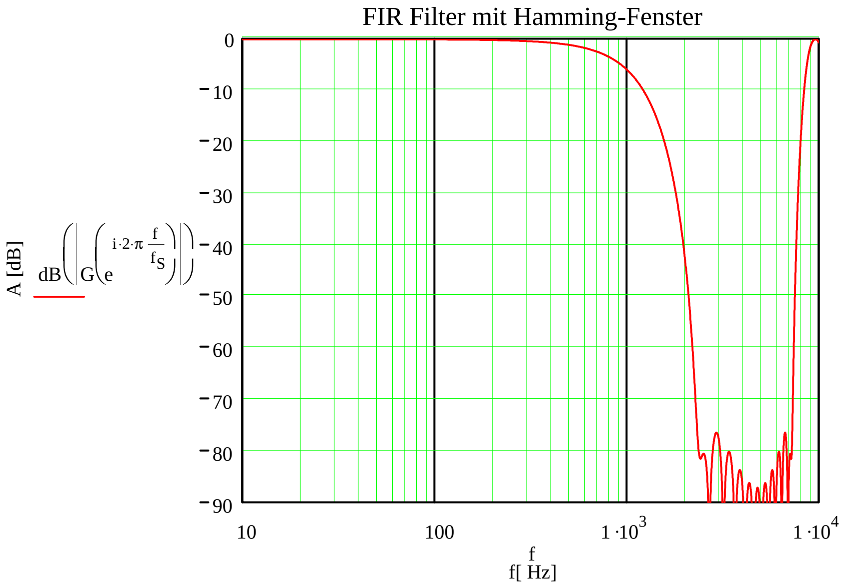


$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_C}{f_S}}\right)\right|\right) = -6.009$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_C

Blackman-Fenster: (Sperrdämpfung >74dB)

$h2_i := \text{blackmanWin}(i, N) \cdot h1_i$ Blackman-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz] $G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h2_k \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion



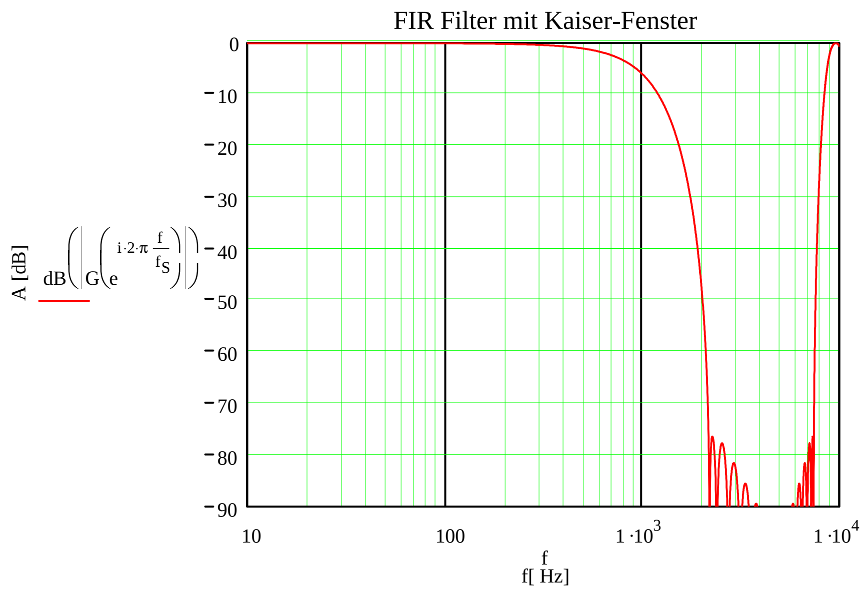
$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_C}{f_S}}\right)\right|\right) = -6.018$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_C

Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >70dB)

$h_{2_i} := \mathrm{kaiserWin}(i, N, 7.76) \cdot h_{1_i}$ Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz]

$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion



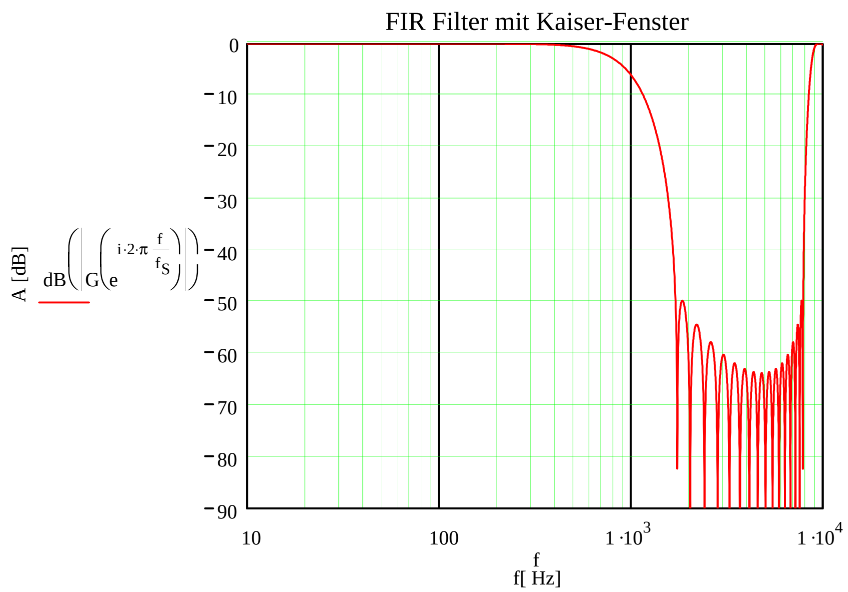
$$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_C}{f_S}}\right)\right|\right) = -6.02$$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_C

Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >50dB)

$h_{2_i} := \mathrm{kaiserWin}(i, N, 4.54) \cdot h_{1_i}$ Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz]

$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h_{2_k} \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion



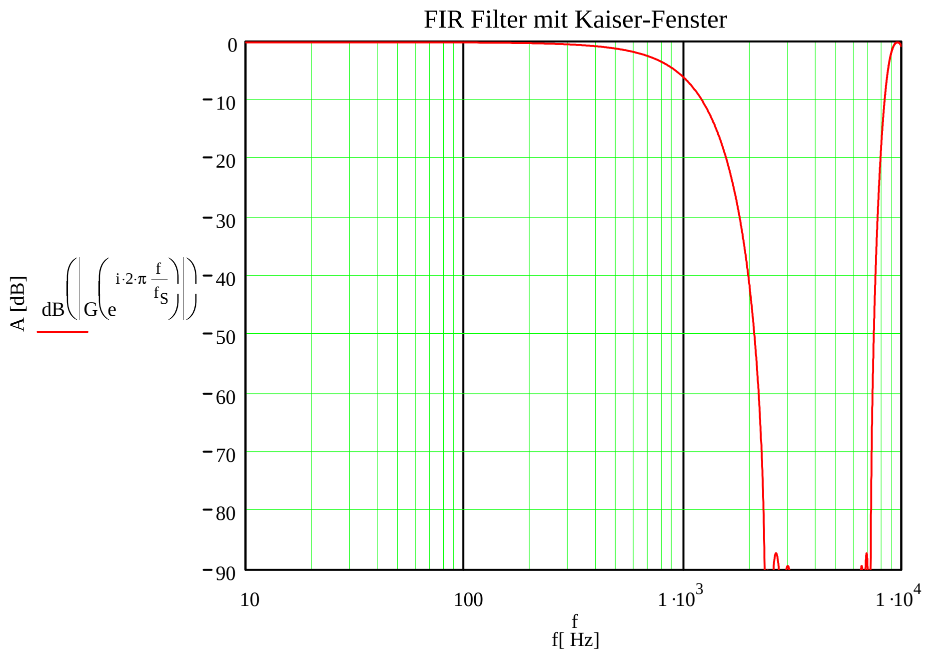
$$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_C}{f_S}}\right)\right|\right) = -6.033$$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_C

Kaiser-Fenster: (Sperrdämpfung >90dB)

$h2_i := \mathrm{kaiserWin}(i, N, 8.96) \cdot h1_i$ Kaiser-gewichtete Filterkoeffizienten

$f := 10, 14 .. 10000$ [Hz]

$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} h2_k \cdot z^{-k}$ Frequenzdiskrete Übertragungsfunktion



$dB\left(\left|G\left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_C}{f_S}}\right)\right|\right) = -6.02$ [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz f_C

$h2 =$

	0
0	$7.823 \cdot 10^{-6}$
1	$-1.339 \cdot 10^{-4}$
2	$-1.249 \cdot 10^{-3}$
3	$-4.146 \cdot 10^{-3}$
4	$-7.017 \cdot 10^{-3}$
5	$-2.695 \cdot 10^{-3}$
6	0.02
7	0.066
8	0.13
9	0.186
10	0.208
11	0.186
12	0.13
13	0.066
14	0.02
15	$-2.695 \cdot 10^{-3}$
16	$-7.017 \cdot 10^{-3}$
17	$-4.146 \cdot 10^{-3}$
18	$-1.249 \cdot 10^{-3}$
19	$-1.339 \cdot 10^{-4}$
20	$7.823 \cdot 10^{-6}$

Kaiser-Filterkoeffizienten

Fenster	Sperrdämpfung [dB]	k
Rechteck	21	2.'0
Bartlett	25	4.0
Hanning	44	4.0
Hamming	53	4.0
Blackman	74	6.0
Kaiser (gamma=2.12)	30	1.54
Kaiser (gamma=4.54)	50	2.93
Kaiser (gamma=7.76)	70	4.32
Kaiser (gamma=8.96)	90	5.71

Fensterfunktionen

$$\mathrm{blackmanWin}(i,N) := 0.42 + 0.5\cdot\cos\left[\frac{2\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right] + 0.08\cdot\cos\left[\frac{4\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\mathrm{hammingWin}(i,N) := 0.54 + 0.46\cdot\cos\left[\frac{2\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\mathrm{bartlettWin}(i,N) := 1 - 2\cdot\frac{\left|i - \frac{N-1}{2}\right|}{N-1}$$

$$\mathrm{hanningWin}(i,N) := 0.5 + 0.5\cdot\cos\left[\frac{2\pi\cdot\left(i - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}\right]$$

$$\mathrm{rectWin}(i,N) := 1$$

$$\mathrm{kaiserWin}(i,N,\gamma) := \frac{\mathrm{I0}\left[2\cdot\frac{\gamma\cdot\sqrt{i\cdot(N-i-1)}}{N-1}\right]}{\mathrm{I0}(\gamma)}$$

Ideale Filterkoeffizienten

$$h_{LP}(i,\Omega_C,N) := \begin{cases} \dfrac{\Omega_C}{\pi} & \text{if } i = \dfrac{N-1}{2} \\ \dfrac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_C\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h_{HP}(i,\Omega_C,N) := \begin{cases} \dfrac{\pi - \Omega_C}{\pi} & \text{if } i = \dfrac{N-1}{2} \\ \dfrac{\sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi\right] - \sin\left[\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\Omega_C\right]}{\left(i - \frac{N-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$