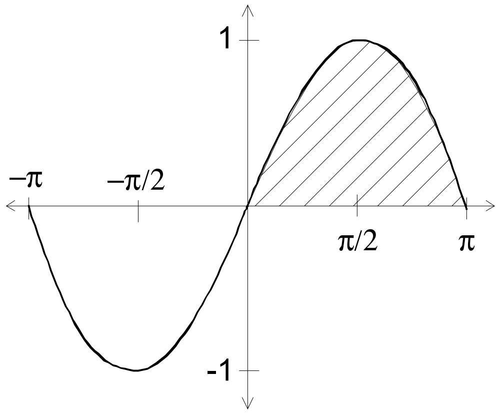
1 Numerische Mathematik (Grundlagen)

Die numerische Mathematik ist ein Teilgebiet der Mathematik. Anders als beispielsweise in der Analysis, liefert die numerische Mathematik als Resultat immer **Zahlenwerte** oder Funktionswerte.

Beispiel: Wie gross ist die schraffierte Fläche?



Als Antwort mit den Mitteln der Analysis erhalten wir:

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x) = ?$$

$$A = \left|-\cos(x)\right|\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{\left|-\cos(\pi)\right| + \left|\cos(0)\right|}}$$

Als numerische Lösung:

$A = \underline{\underline{2.0}}$ (Mit einem numerischen Integrationsverfahren)

Viele numerische Verfahren liefern meist nur Näherungslösungen. Sie werden vor allem dort eingesetzt wo keine analytischen Methoden zur Verfügung stehen, oder für die praktische Anwendung zu kompliziert sind. Trotzdem geht es auch hier nicht ohne Hilfsmittel der Analysis oder Algebra, vor allem wenn die Richtigkeit der numerischen Methode begründet werden soll.

1.1 Gebiete der numerischen Mathematik

Die numerische Mathematik befasst sich vor allem mit folgenden Aufgabenstellungen:

Zahlenrechnen
Rundung
Determinanten
Lösung linearer Gleichungssysteme
Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme (Nullstellen)
Interpolation
Ausgleichsrechnung
Iterationsverfahren
Lösung von DGL und DGL-Systemen
Fehlerrechnung
Intervallrechnung
Matrixinversion
Eigenwertprobleme
Auswertung von Funktionen
Extrapolation
Approximation von Funktionen
Rekursionsverfahren
Numerische Differentiation
Monte-Carlo-Methoden

Wir setzen Schwerpunkte in den Bereichen:

- Rundung, Fehlerfortpflanzung
- Zahlendarstellung
- Ausgleich und Interpolation
- Polynomfunktionen
- Lösen von linearen Gleichungssystemen
- Lösen von DGL und DGL-Systemen

Alle Themen werden sowohl in der Theorie behandelt wie auch praktisch in Form von Programmierung eines lauffähigen Verfahrens auf dem PC.

Mathematische Grundlagen

Die Kenntnis der nachfolgenden mathematischen Begriffe ist unabdingbar für die Arbeit mit numerischen Verfahren und statistischen Methoden.

1.2 Diskrete und stetige Variablen

Eine Variable ist ein Symbol, wie etwa $X, Y, x,$ oder a, das irgendeinen bestimmten Wert aus der festgelegten Menge, dem Wertebereich der Variablen, annehmen kann.

Eine Variable die nur einen Wert annehmen kann, wird **Konstante** genannt.

Eine Variable, die theoretisch jeden beliebigen Wert innerhalb des Wertebereiches zwischen zwei gegebenen Werten annehmen kann, wird **stetige Variable** genannt. Andernfalls heissen sie **diskrete Variablen**.

Beispiele: Die Anzahl N der defekten Glühlampen, die jeden der Werte *0,1,2,3,...* annehmen kann, ist eine diskrete Variable. Grund: Sie kann nie den Wert von beispielsweise *1.5* oder *4.82* annehmen.

Der Wert X , der die Lebensdauer einer bestimmten Taschenlampenbatterie mit *10.124h* angibt, ist eine stetige Variable. Grund: Je nach Batterie und Messgenauigkeit wären Werte im Bereich [*10,15*] möglich.

Die Daten, die durch diskrete oder stetige Variablen beschrieben werden können, werden diskrete Daten oder stetige Daten genannt. So ist die Anzahl Kinder in jeder von 1000 Familien ein Beispiel für diskrete Daten, während die Grössen von 100 Studenten ein Beispiel für stetige Daten sind.

Grundsätzlich kann man sagen, dass Messungen zu stetigen Daten führen, während Auf- und Abzählungen zu diskreten Daten führen.

Es ist manchmal günstig den Begriff Variable auch auf nichtnumerische Begriffe auszudehnen. So kann die Farbe F einer Ampel die Werte *rot, gelb, grün* annehmen. Im allgemeinen ist es möglich solche aufzählbaren Variablenwerte durch numerische Werte zu ersetzen. Man wählt dann zweckmässigerweise eine definierte Zuordnung wie rot=1, gelb=2, grün=3. Oft kann für Elemente, die Vertreter einer geordneten Menge sind (z.B. Buchstaben), über die Ordinalzahl eine klare Zuordnung geschaffen werden.

1.3 Indizes

Sei x_j das Symbol, das irgendeinen der n Werte $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ bezeichnet, den die Variable x annehmen kann. Der Buchstabe j bei x_j ist irgendeine ganze Zahl im Bereich 1, 2, ..., n und wird als Index bezeichnet. Für Indizes werden häufig die Buchstaben i, j, k, q oder s benutzt.

1.4 Summenzeichen

Das Symbol $\sum_{i=1}^{n} x_i$ wird benutzt um die Summe aller x_i von i=0 bis i=n zu bezeichnen. Es dient hauptsächlich dazu umfangreiche Summationen handlich zu notieren. Per Definition ist also:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \tag{1.1}$$

Für das Summenzeichen gelten unter anderem folgende Rechenregeln:

$$\sum_{i=1}^{n} k\, x_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) \tag{1.3}$$

1.5 Das Produktzeichen

Das Symbol $\prod_{i=1}^{n} x_i$ wird benutzt um das Produkt aller x_i von i=0 bis i=n zu bezeichnen. Es dient hauptsächlich dazu umfangreiche Produkte handlich zu notieren. Per Definition ist also:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n \tag{1.4}$$

Es ist weniger gebräuchlich als das Summenzeichen.

1.6 Arithmetischer Mittelwert

Umgangssprachlich als Durchschnitt bezeichnet. Er verkörpert den arithmetischen Mittelwert von n Zahlen und ist folgendermassen definiert:

$$\bar{x} := \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{1.5}$$

Für gruppierte Daten wird der Mittelwert anders bestimmt. Vergleichen Sie dazu dazu'empirischer Mittelwert' im Kapitel 10.

1.7 Geometrischer Mittelwert

Das geometrische Mittel ist die n-te Wurzel aus dem Produkt der Zahlen x_1, x_2, x_3, ..., x_n und ist definiert als:

$$g = \sqrt[n]{\prod_{i=1} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \tag{1.6}$$

In der Elektronik sehen wir eine Anwendung des geometrischen Mittels beim Schwingkreis: Die Mittenfrequenz ist das geometrische Mittel der beiden -3dB Frequenzen.

Nebenbei sei bemerkt, dass das geometrische Mittel immer kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist. Dieser Umstand wird oft in mathematischen Herleitungen benutzt um zu vereinfachen.

1.8 Umgang mit Fehlern

Wir betrachten nun die häufigsten Operationen zur Gewinnung von Näherungswerten für reelle Zahlen. Besonders in Systemen mit beschränkter Stellenzahl der Mantisse ist diesem Umstand Beachtung zu schenken. Oft werden durch kummulierendes Auf- und Abrunden Fehler erzeugt, die durch geschickte Wahl der Methoden vermeidbar wären.

1.8.1 Verkürzen (truncation)

Darunter versteht man das Abbrechen der Ziffernfolge nach k (Mantissen-) Stellen ohne jede Änderung an den k ersten Stellen einer Zahl. Die Verkürzung wird oft mit ... nach der k-ten Stelle beschrieben. Der angenäherte Wert wird mit $\tilde{x}$ bezeichnet.

Beispiel: $x = 3.1415926 \mapsto \tilde{x} = 3.141\ldots$ (Verkürzung auf 3 Dezimalen)

1.8.2 Rundung (rounding)

Abrundung

eine Abrundung auf die k-te Stelle entspricht einer Verkürzung.

Aufrundung

Eine Aufrundung auf die k-te Stelle ist die Addition einer Einheit zu dem auf k Stellen verkürzten Wert. Ausnahme: x ist mit genau k Stellen gegeben, bzw. enthält nach der k-ten Stelle nur Nullen.

Beispiel: $x = 3.1415926 \mapsto \tilde{x} = 3.15$ (Aufrundung auf 3 Dezimalen)

Symmetrische Rundung

Diese verkörpert die Rundung auf die nächste rationale Zahl und ist die 'konventionelle' Rundungsmethode.
Im Dezimalsystem gilt für die symmetrische Rundung auf k Stellen:

> Abrundung, falls die Ziffer an der Stelle k+1 den Wert *0, 1, 2, 3* oder *4* hat.
> Aufrundung, falls die Ziffer an der Stelle k+1 den Wert *5, 6, 7, 8* oder *9* hat

Beispiele: $x = 3.1415926 \mapsto \tilde{x} = 3.14$ (Rundung auf 2 Dezimalen)
$x = 3.1415926 \mapsto \tilde{x} = 3.142$ (Rundung auf 3 Dezimalen)

Spricht man einfach von 'Rundung' versteht man implizit die symmetrische Rundung.

Rundung auf die nächste gerade ganze Zahl

Dieses Verfahren ist besonders bei der Verminderung von kumulierten Rundungsfehlern nützlich, also wenn eine grosse Anzahl von Rundungsoperationen nacheinander durchgeführt werden.
Bei der Rundung auf die nächste gerade ganze Zahl wird die Zahl normal (symmetrisch) auf k Stellen gerundet. Ist jetzt die k-te (letzte) Stelle eine ungerade Zahl, so wird diese um eins erniedrigt.

Beispiele: $x = 4.25 \mapsto \tilde{x} = 4.2$ (Rundung auf 1 Dezimale)
$x = 4.35 \mapsto \tilde{x} = 4.4$(Rundung auf 1 Dezimale)

1.9 Geltende Ziffern

Die geltenden Ziffern einer Zahl sagen aus, welche dieser Stellen exakt sind. So können wir auf Grund der Anzahl geltender Ziffern eines Messwertes aussagen in welchem Bereich die wahre Grösse liegt. Alle Ziffern, ausser der Nullen zur Kommastellenbildung, werden geltende Ziffern genannt.

Beispiel: Die Messung einer Spannung ergibt den Wert von 230.4V, die wahre Grösse liegt also zwischen 230.35V und 230.44V.

Zahlen, die aus Auf- oder Abzählungen entstanden sind, sind natürlich exakt und haben demnach eine unendliche Anzahl geltende Ziffern.
Oft ist ohne zusätzliche Information nicht zu entscheiden, wie viele geltende Ziffern eine Zahl hat. So kann 532 400 000 4 ..9 geltende Ziffern haben.

Beispiele:

6.465 hat vier geltende Ziffern
6.46500 hat sechs geltende Ziffern
2.30 hat drei geltende Ziffern
0.003 hat eine geltende Ziffer

Anmerkung:
Die Bestimmung der *Anzahl signifikanter Stellen* wird definitionsgemäss anders vorgenommen. (Vgl. Hämmerlin, Numerische Mathematik, Springer Verlag)

1.10 Fehler

Definitionsgemäss ist der Fehler die Differenz zwischen wahrer Grösse und einem Näherungswert. Wir unterscheiden zwischen absolutem Fehler und relativem Fehler:

Fehler

$\tilde{x} \approx x$ — $\tilde{x}$ = Näherungswert (Bsp. Messwert)
x = Wahre Grösse

$$\varepsilon(\tilde{x}) := \tilde{x} - x \qquad \text{absoluter Fehler von } \tilde{x} \tag{1.7}$$

$$\delta(\tilde{x}) := \frac{e(\tilde{x})}{x} = \frac{\tilde{x} - x}{x} \qquad \text{relativer Fehler von } \tilde{x} \text{ (falls } x \neq 0) \tag{1.8}$$

Oft werden die Fehler als Beträge angegeben, weil zur Fehleranalyse und Berechnung normalerweise nur die Fehlerbeträge relevant sind. Für eine einzelne Abweichung geht aber die Information verloren, ob sie positiv oder negativ zur wahren Grösse ist.

Beispiel: Beim Eichen eines Voltmeters wird bei 10.0000V Eingangsspannung 0.99301V gemessen. Bestimmen Sie den absoluten sowie den relativen Fehler!

$$x = 10.0000V \quad \tilde{x} = 9.9301V$$

$$\varepsilon(\tilde{x}) = \tilde{x} - x = 10.0000V - 9.9301V = 0.0699V = \underline{69.9 \cdot 10^{-3} V}$$

$$\delta(\tilde{x}) = \frac{\varepsilon(\tilde{x})}{x} = \frac{69.9 \cdot 10^{-3} V}{10.0000V} = \underline{6.99 \cdot 10^{-3}} \ \hat{=} \ 6.99‰$$

1.10.1 Fehler bei der Datenerfassung

Wir unterscheiden zwischen systematischen und statistischen Fehlern. Beide Fehlertypen verfälschen das Ergebnis und sind deshalb zu vermeiden.
Systematische Fehler können durch sorgfältige Überlegung und entsprechende Wahl der Messanordung ausgeschlossen werden.
Statistische Fehler können mit Hilfe der Statistik beschrieben und ausgewertet werden. Mit Hilfe statischer Methoden lässt sich dann die Streuung und Mittelwerte, sowie andere Grössen ermitteln.

1.10.2 Systematische Fehler

Systematische Fehler entstehen beispielsweise durch schlecht geeichte Geräte, so dass alle gemessenen Daten mit einem mehr oder weniger grossen Fehler behaftet sind. Im Gegensatz zu den statistischen Fehlern können systematische Fehler bei der (Datenerfassung) Messung manchmal berücksichtigt werden, wenn es sich nicht um grobe Fehler handelt.

Beispiel: Ein zur Druckmessung verwendetes Manometer zeigt über den gesamten Messbereich von 0..300 bar konstant 7.5% zu viel an.

Als Beispiele für Ursachen systematischer Fehler können genannt werden:
- Umwelteinflüsse: Temperatur, Luftdruck, Licht, etc.
- Messbedingungen sind nicht konstant: Netzspannung schwankt, Temperatur, verunreinigte Chemikalien, etc.
- Unvollkommenheit der Messinstrumente: Eichfehler, Nichtlinearität, Überlastung, etc.
- Beobachtungsfehler: Parallaxe, falsche Ablesung, 'Wunschablesung', etc.
- Verarbeitungsfehler: Rechenfehler, falsche Handhabung, etc.

Der Regelfall ist jedoch:

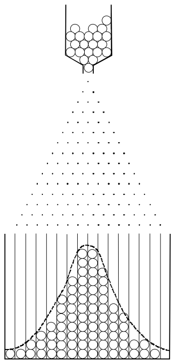
Systematischer Fehler ⇒ Das Messergebnis ist falsch

Grobe Fehler sind falsche Werte in den Merkmalsdaten. Die Erfahrung zeigt, dass in einem Datensatz mit bis 10% groben Fehlern gerechnet werden muss.

1.10.3 Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch zufällige Einflüsse. Dabei spielt das Zusammenwirken mehr oder weniger unabhängiger Einflüsse bei der Datenerfassung eine Rolle. Wir können die Abweichung vom Sollwert als eine zufällige Variable betrachten. Die Abweichungen sind annähernd normal verteilt (mehr darüber im Kapitel Normalverteilung).

Ein anschauliches Beispiel für die Normalverteilung ist das Experiment mit dem Zufallsapparat nach Galton, dem sog. Galtonschen Brett:
Man lässt kleine Kugeln durch ein System von Nägeln, die gemäss nachfolgender Abbildung angeordnet sind, hindurchrollen. Nach der n-ten Nagelreihe fallen die Kugeln schlussendlich in $(n+1)$ Fächer. Man erhält stets eine Verteilung die sich durch eine Glockenkurve darstellen lässt (sog. Gaussche Glockenkurve):



Zufallsapparat nach Galton zum experimentellen Ermitteln der Normalverteilungskurve

Ursachen für zufällige Fehler:

- Nicht erfassbare Änderung der Umwelteinflüsse: Änderung der Gravitation, Erderschütterungen, Einstreuungen, etc.
- Nicht erfassbare Änderungen der Messgeräte: Statische Aufladung, Lagerreibung, etc.

Für statistische Fehler gilt die Aussage:

Statistischer Fehler⇒ Das Messergebnis ist unsicher

1.11 Fehlerfortpflanzung

Die Fehleranalyse (Fehlerrechnung) befasst sich mit Eingangsfehlern und ihrer Fortpflanzung infolge rechnerischer Verarbeitung. Es interessiert also beispielsweise wie stark sich Schwankungen an den Eingängen eines Systems am Ausgang auswirken.

Die Bestimmung kann grundsätzlich aus zwei Arten erfolgen:

Methode der Intervallrechnung: Durchführen der Rechnung mit allen Extremwerten. Dabei werden alle möglichen Extremwerte systematisch durchgerechnet und die Extrema bestimmt.

Systematisches Fehlerfortpflanzungsgesetz: Analytische Methode für systematische Fehler.

Gaussches Fehlerfortpflanzungsgesetz: Statistische Methode für zufällige Fehler.

1.11.1 Systematisches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Bei systematischen Fehlern sind die Ursachen bekannt und sie bewirken konstante Abweichungen um einen bestimmten Betrag und Vorzeichen. Systematische Fehler sind prinzipiell korrigierbar, die Korrektur sollte aber möglichst frühzeitig erfolgen. Die Fehlerfortpflanzung erfolgt nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für systematische Fehler. Die Methode schätzt den Fehler am Ausgang eines Systems ab, bei dem mehrere fehlerbehaftete Grössen zusammenwirken.

Da die Methode eine Näherung ist, ist sie nur für kleinere Fehler hinreichend genau. Die Begründung liegt im Taylorreihenansatz, die der Methode zugrunde liegt. Bei der Reihenentwicklung wird nach linearen Glied abgeschnitten.

Wir definieren:

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ Wahrer Funktionswert
$\tilde{y} = f(f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k)$ Fehlerbehafteter Funktionswert

$\Delta x_i := \tilde{x}_i - x_i$ Abweichung von von $\tilde{x}$ vom wahren Wert x (1.9)
$\Delta y_i := f(\underline{\tilde{x}}) - f(\underline{x}) = \tilde{y} - y$ Abweichung von von $\tilde{y}$ vom wahren Wert y (1.10)

Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz beschreibt die formal die Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\tilde{y} = f(\underline{\tilde{x}}) - f(\underline{x}) \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) \cdot \Delta\tilde{x}_i \qquad (1.11)$$

Fehlerfortpflanzungsformel für systematische Fehler

Begründung:
Der absolute Fehler $\Delta\tilde{y}$ ist

$$\Delta\tilde{y} = y - \tilde{y} = f(x_1 + \Delta\tilde{x}_1, x_2 + \Delta\tilde{x}_2, \cdots, x_k + \Delta\tilde{x}_k)$$

Unter der Annahme, dass der absolute Einzelfehler $\Delta\tilde{x}_i$ klein gegenüber dem Einzelwert x_i ist $\left(|\Delta\tilde{x}_i| << |x_i|\right)$, kann $\Delta\tilde{y}$ sehr einfach aus den partiellen Ableitungen entwickelt werden, da nur die linearen Glieder der Taylor-Reihe verwendet werden.

Wenden wir die Formel (1.11) auf die vier Grundrechenoperationen an und erhalten die Fehlerfortpflanzungen:

$$y = f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\tilde{y} = \Delta\tilde{x}_1 + \Delta\tilde{x}_2 \qquad (1.12)$$

$$y = f(x_1 - x_2) = x_1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\tilde{y} = \Delta\tilde{x}_1 - \Delta\tilde{x}_2 \qquad (1.13)$$

$$y = f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\tilde{y}}{y} \approx \frac{\Delta\tilde{x}_1}{x_1} + \frac{\Delta\tilde{x}_2}{x_2} \text{ bzw. } \Delta\tilde{y} \approx \Delta\tilde{x}_1 x_2 + \Delta\tilde{x}_2 x_1 \qquad (1.14)$$

$$y = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\tilde{y}}{y} \approx \frac{\Delta\tilde{x}_1}{x_1} - \frac{\Delta\tilde{x}_2}{x_2} \qquad (1.15)$$

Diese Formeln setzen voraus, dass die Abweichung klein gegenüber der wahren Grösse ist.

Beispiel: Bestimmen Sie eine Fehlerschranke für die Funktion $y = x^2$ für den Fall, dass $\tilde{x} = 0.25, \Delta\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

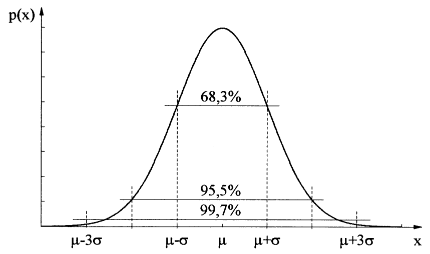
$$\Delta\tilde{y} \approx \frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\tilde{x}^2\right) \cdot \Delta\tilde{x} = 2x \cdot \Delta\tilde{x} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-2}$$

Zusammenfassung
Bei systematischen Fehlern sind die Uraschen bekannt und die Abweichungen konstant in Wert und Vorzeichen. Die Fehler sind prinzipiell korrigierbar. Systematische Fehler pflanzen sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz fort und es gelten folgende Regeln für die Grundrechenoperationen:

Addition:	Die absoluten Fehler werden addiert.
Subtraktion:	Die absoluten Fehler werden subtrahiert.
Multiplikation:	Die relativen Fehler werden addiert.
Division:	Die relativen Fehler werden subtrahiert.

1.11.2 Fortpflanzung zufälliger Fehler

Etwas komplizierter berechnet sich die Fortpflanzung zufälliger Fehler. Zufällige Messfehler können nur in Form von Wahrscheinlichkeitsaussagen beschrieben werden. Man legt eine Normverteilung zugrunde, wobei die Werte um einen Mittelwert streuen:



Gaussche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Zur Beurteilung von zufälligen Fehlern sind eine grössere Anzahl Werte zwingend notwendig.

1.11.2.1 Normalverteilte Werte

Die zu untersuchenden Werte streuen um den Mittelwert μ. Mit dem Streuungsparameter σ, der sog. Standardabweichung, wird der Grad der Streuung um den Mittelwert beschrieben. Weitere Betrachtungen zu normalverteilten Daten werden im Kapitel 10 'Statistik' durchgeführt.

Die Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten eines Wertes im Intervall $[x_1, x_2]$ entspricht der Fläche unter dem Graphen und berechnet sich:

$$p = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_1} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (1.16)$$

Das Integral der Form $\int e^{ax^2} dx$ besitzt keine analytische Lösung. Deshalb definiert man als Lösung für dieses Integral die Gaussche Fehlerfunktion $erf(\omega)$:

$$erf(\omega) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega} e^{-c^2} dc$$ **Gaussche Fehlerfunktion** (1.17)

Die Werte dieser Funktion können mit numerischen Verfahren beliebig genau bestimmt werden und sind in gängigen Tabellenwerken aufgeführt.

Zur konkreten Berechnung mit der Fehlerfunktion benutzt man die Substitution:

$$c = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \qquad (1.18)$$

Damit erhält man als Lösung für das obige Integral:

$$p = \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) - erf\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \qquad (1.19)$$

Tabellierte Werte der Fehlerwahrscheinlichkeit (statistischen Sicherheit) p sind für ein symmetrischen Intervall $[\mu-\delta,\mu+\delta]$:

σ	0.5σ	0.67σ	1σ	1.65σ	1.96σ	2σ	2.58σ	3σ	3.3σ	4σ
p[%]	38.3	50	68.3	90	95	95.44	99	99.73	99.9	≈100

Der zufällige Fehler F_{xi} eines Einzelwertes x_i liegt dann mit der statistischen Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) p innerhalb des Intervalls [-tσ,+tσ]:

$$F_{xi} = \pm t\sigma \qquad (1.20)$$

Zufälliger Fehler eines Einzelmesswertes F_{xi}

Wird beispielsweise eine statistische Sicherheit von 95% gefordert, beträgt der Vertrauensfaktor t=1.96 nach Tabelle für eine grosse Anzahl N. Dies bedeutet, dass die Abweichung mit 95% Wahrscheinlichkeit bei einem einzelnen Wert nicht mehr als 1.96σ vom wahren Mittelwert μ beträgt.

Ist die Anzahl der Werte N klein, wird der Vertrauensfaktor t nach folgender Tabelle bestimmt. Zwischenwerte werden durch Interpolation berechnet:

N	P=68.3%=1σ		P=95%=1.96σ		P=99%=2.58σ		P=99.73%=3.0σ	
	t	$t/\sqrt{N}$	t	$t/\sqrt{N}$	t	$t/\sqrt{N}$	t	$t/\sqrt{N}$
2	1.84	1.30	12.71	8.99	63.66	45.01	235.8	166.7
3	1.32	0.76	4.30	2.48	9.9	5.70	19.2	11.10
4	1.20	0.45	3.20	1.60	5.8	2.90	9.2	4.60
6	1.11	0.34	2.60	1.06	4.0	1.63	5.5	2.25
10	1.06	0.23	2.30	0.73	3.2	1.01	4.1	1.30
20	1.03	0.14	2.10	0.47	2.9	0.65	3.4	0.76
50	1.01	0.10	2.00	0.28	2.7	0.38	3.1	0.44
100	1.00	0.10	1.97	0.20	2.6	0.26	3.04	0.30
200	1.00	0.07	1.96	0.14	2.58	0.18	3.0	0.21
>200	1.00	$1.00/N \approx 0$	1.96	$1.96/N \approx 0$	2.58	$2.58/N \approx 0$	3.0	$3.00/N \approx 0$

Tabelle:
Vertrauensfaktor t in Abhängigkeit der Anzahl Messwerte N bei verschiedenen statistischen Sicherheiten P.

Quelle: Lerch, Elektrische Messtechnik, Springer Verlag.

1.11.2.2 Mittelwert, Standardabweichung

Für eine endliche Anzahl von Werten definiert man den empirischen Mittelwert $\bar{x}$ als Schätzwert und die empirische Standardabweichung s als Schwankung. Die Standardabweichung beschreibt die mittlere Abweichung eines Einzelwertes $\tilde{x}_i$ um den Mittelwert $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_i \qquad N = \text{Anzahl Werte} \qquad (1.21)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\tilde{x}_i - \bar{x}\right)^2} \qquad (1.22)$$

Empirischer Mittelwert und Standardabweichung

Der Wert von s wird auch als mittlerer quadratischer Fehler der Messwerte $\tilde{x}_i$ bezeichnet.

1.11.3 Gaussches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Grundlage ist wiederum eine Funktion $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k)$ mit mehreren unabhängigen und zufälligen Fehlern behafteten Argumenten. Ziel der Untersuchungen ist es, eine formale Zusammenstellung für Mittelwert und Standardabweichung zu finden, wenn sich zufällige Fehler fortpflanzen.

Der Mittelwert, der dem wahren Mittelwert entspricht ergibt sich für $N \to \infty$:

$$y = \mu_Y = f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) \tag{1.23}$$

Die μ_i verkörpern die Mittelwerte der Einzelwerte $\tilde{x}_i$.

Unter der Voraussetzung, dass die einzelnen Standardabweichungen σ_i klein sind, lässt sich die resultierende Standardabweichung σ_Y nach dem Gausschen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen:

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}_i} (\overline{\overline{x}}_i) \right)^2 \sigma_i^{\,2}} \tag{1.24}$$

Für eine endliche Anzahl Werte erhalten wir wiederum nur eine Näherung für den Mittelwert und Standardabweichung.
Wenn die einzelnen Standardabweichungen s_i klein sind, wird unter Zugrundelegung einer Normalverteilung:

$$\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k) \tag{1.25}$$

$$s_{\overline{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{d\overline{x}_i} (\overline{\overline{x}}_i) \right)^2 s_i^{\,2}} \tag{1.26}$$

1.11.4 Schätzwerte und Vertrauensbereiche

Bei einer Grundgesamtheit von N Stichproben mit jeweils wiederum N Einzelwerten können N Schätzwerte $\overline{x}_i$ berechnet werden. Der gesamte Mittelwert $\overline{\overline{x}}$ (Mittelwert der Mittelwerte) der N Schätzwerte wird demnach:

$$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i \qquad N\text{: Anzahl Schätzwerte} \tag{1.27}$$

Aus dem Gausschen Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt die Standardabweichung (Streuung) der Schätzwerteverteilung:

$$s_{\overline{X}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_i^2} \tag{1.28}$$

Begründung:
Wir wenden das Gausssche Fehlerfortpflanzungsgesetz mit der Formel für den Mittelwert an und erhalten:

$$s_{\overline{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \overline{\overline{x}}}{d\overline{x}_i} (\overline{x}_i) \right)^2 s_i^{\,2}} \qquad \text{Mit: } \frac{\partial \overline{\overline{x}}}{d\overline{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i \right) = \frac{1}{N} \qquad \text{folgt:} \tag{1.29}$$

$$s_{\overline{Y}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_i^2}$$

Die Standardabweichung der Verteilung der Schätzwerte $\overline{x}_i$ ist daher um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ kleiner als die Standardabweichung eines Einzelwertes. Dies bedeutet, dass z.B. für N=100 Messwerte der gefundene Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% um höchstens $\pm\frac{2.58 s_{\overline{X}}}{\sqrt{100}}$ vom unbekannten wahren Wert x_w abweicht.

Ein zu erwartender Messwert x kann nun mit einer bestimmten statistischen Sicherheit mit dem Schätzwert $\overline{x}$ und den zugehörigen Vertrauensgrenzen V beschrieben werden:

$$x = \overline{x} \pm V = \overline{x} \pm \frac{t \cdot s}{\sqrt{N}} \qquad (1.30)$$

Der zufällige Fehler eines Schätzwertes $F_{\overline{x}}$ wird daher:

$$F_{\overline{x}} = \pm\frac{t \cdot s}{\sqrt{N}} \qquad (1.31)$$

Zufälliger Fehler eines Schätzwertes

Beispiel:
Bestimmen Sie aus der folgenden Messreihe mit normalverteilten, zufälligen Fehlern

a.) Den zufälligen Fehler F_{xi} der Einzelmessung bei einer statistischen Sicherheit von 95%.
b.) Den zufälligen Fehler des Schätzwertes $F_{\overline{X}}$ mit der gleichen statistischen Sicherheit.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	51.43	48.33	45.75	46.46	50.43	49.26	48.67	50.80	52.48	48.47

Der Schätzwert und die Schwankung werden nach (1.21) und (1.22):

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{10}(51.43 + \cdots + 48.47) = 49.208$$

$$\mathrm{s} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N-1}}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{x}_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{9}(51.43 - 49.208)^2 \cdots (48.47 - 49.208)^2} = 2.129$$

Der zufällige Fehler des Einzelwertes wird mit einer statistischen Sicherheit von 95% gemäss (1.20):

$$F_{xi}(95\%) = \pm t \cdot s = 2.3 \cdot 2.129 = \pm 4.897$$

Der zufällige Fehler des Schätzwertes ergibt sich bei der selben statistischen Sicherheit:

$$F_{\overline{x}} = \pm\frac{t \cdot s}{\sqrt{N}} = \pm\frac{2.3 \cdot 2.129}{\sqrt{10}} = \pm 1.548$$

Das vollständige Messergebnis kann nun in der Form erfolgen:

$$x = 49.208 \pm 1.548$$

Die Angabe der Toleranzgrenzen bezieht sich hierbei auf die statistische Sicherheit von 95%.

1.12 Aufgaben

Variable

1. Welches stellen diskrete Daten und welches stellen stetige Daten dar?
   a.) Anzahl Messungen die in einer Messreihe durchgeführt werden.
   b.) Messwerte die wir aus a erhalten.
   c.) Lebensdauer der in einer Fabrik produzierten Radioröhren.
   d.) Jährliches Einkommen von Elektroingenieuren.
   e.) Breite von Trafoblechen, die aus Stichprobe von 1000 Stück gemessen werden.

2. Bestimmen Sie den Bereich der Variablen und geben Sie an ob sie stetig oder diskret sind:
   a.) Kapazität K eines Bleiakkumulators.
   b.) Anzahl Bücher B auf einem Bücherbrett.
   c.) Summe S der Augenzahlen die beim Würfeln mit drei Würfen erzielt werden können.
   d.) Durchmesser D eines Kreises.
   e.) Gleichstromverstärkung B eines Transistors.

3. Drücken Sie folgende Aussagen in Symbolen aus:
   a.) Die Variable X besitzt Werte zwischen 2 und 5 einschliesslich.
   b.) Das arithmetische Mittel $\overline{X}$ ist grösser als 27.3 und kleiner als 34.21.
   c.) Die positive Zahl m ist grösser gleich 10.
   d.) P ist eine nicht negative Zahl.

Summen- und Produktzeichen

4. Welchen Zahlenwert bilden nachfolgende Summen bzw. Produkte?
   a.) $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i}$ b.) $\sum_{k=3}^{10}k^3$ c.) $\sum_{k=1}^{4}3^{4-k}2^k$ d.) $\prod_{k=1}^{100}\frac{k+1}{k}$ e.) $\prod_{k=1}^{5}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$

5. Berechnen Sie die Summen:
   a.) $\sum_{k=1}^{4}ak\sum_{j=1}^{4}b\frac{1}{j}$ b.) $\sum_{k=1}^{4}ak\sum_{j=k}^{4}b\frac{1}{j}$

Arithmetisches und geometrisches Mittel

6. Bestimmen Sie aus den folgenden Werten den arithmetischen Mittelwert:
   a.) {7, 8, 1 , 5 , 4, 9, 11}
   b.) {5, -3, 8, -10, 2, 6, -10}
   c.) Der Summenelemente in $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$

7. Bestimmen Sie aus den folgenden Werten den geometrischen Mittelwert:
   a.) {2, 3, 4}
   b.) {2, 2, 0}
   c.) {2, 3, 10, 24, 15,100}

Auf und Abrunden

8. Runden Sie jede der folgenden Zahlen auf die geforderte Genauigkeit auf oder ab, nach der Methode der symmetrischen Rundung.

   a.) 23.6 nächstes Ganzes
   b.) 3.848 nächstes Hundertstel
   d.) 0.046 nächstes Hundertstel
   d.) 65.95 nächstes Ganzes
   e.) 365 nächstes Hundert
   f.) 32768 nächstes tausend

9. Addieren Sie die Zahlen 2.15, 2.25, 2.35, 2.45, 2.55, 2.65, 2.75, 2.85, 2.95 und vergleichen Sie den Fehler:
   a.) direkt
   b.) durch symmetrisches auf eine Kommastelle

Absoluter und relativer Fehler

10. Ein Messinstrument zeigt 2.8A an. Der wahre Wert ist jedoch 2.88A. Wie gross ist der absolute und relative Messfehler?

11. Ein Voltmeter zeigt an einer Eichspannungsquelle von 1.000V 1.5% zu wenig an. Bestimmen Sie den angezeigten Messwert und den absoluten Fehler.

12. Bei Messinstrumenten kennt man genormte Genauigkeitsklassen:
    Feinmessgeräte (Präzisionsgeräte): 0.1, 0.2, 0.5
    Betriebsmessgeräte: 1, 1.5, 2.5, 5, 10

    Wobei die Genauigkeitsklasse wie folgt definiert ist: $Gk := \frac{|\varepsilon|}{MB}$

    Gk: Genauigkeitsklasse
    MB: Messbereichsendwert
    ε: Absoluter Fehler

    Wir messen nun mit einem Amperemeter der Klasse 1.5 im 10A- Bereich den wahren Strom von 7.5A. Wie gross ist der Bereich des möglichen Anzeigewertes, sowie der maximale relative Messfehler?

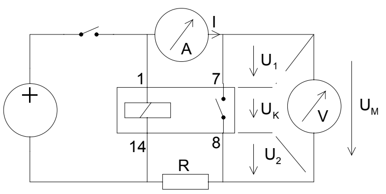
13. Wie 12.), aber für 2.3A im gleichen Messbereich.

Fehlerrechnung

14. Bestimmen Sie für systematischen Fehler für die Funktion $y = 3x_1x_2 + \frac{7}{8}x_3$ die Fehlerschranke für den Fall, dass $\tilde{x}_1 = 0.3, \Delta\tilde{x}_1 = 0.05, \tilde{x}_2 = 0.1, \Delta\tilde{x}_2 = 0.12, \tilde{x}_3 = 0.3, \Delta\tilde{x}_3 = 0.1$.

15. Wie lautet die Fehlerfortpflanzung für $y=f(x)=\ln(x)$ für systematische Fehler?

16. Mit einer Stichprobe aus einem Los Relaismatiken im DIL-Gehäuse wird eine Kontaktwiderstandsmessung mit einem Vierleiterverfahren mit folgender Messschaltung durchgeführt:



Die Leiterwiderstände für die Spannungsabfälle U_1 und U_2 betragen R_{U1}=24mΩ und R_{U2}=22.4mΩ.

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
U_M[mV]	21.56	22.00	21.85	22.06	21.89	21.81	22.26	21.75	22.32	21.50	21.62	21.48
I [mA]	149.76	149.72	149.85	150.30	150.05	150.32	149.90	150.23	151.13	150.38	150.54	150.47

Berechnen Sie:
a.) Den Schätzwert für den Kontaktwiderstand.
b.) Die Standardabweichung s_{RK} mit der die Messwerte behaftet sind.
c.) Die Vertrauensgrenzen V des Messergebnisses, wenn 95% statistische Sicherheit gefordert werden.