U18Numerische Integration nach Simpson II

Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Wert des Integrales $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$ $\quad ,wenn \quad f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 0 \\ -x^2 & ,x\ge 0 \end{cases}$, sowie die im Intervall [-2,4] zwischen dem Graphen *f(x)* und der *x*-Achse eingeschlossenen Fläche.

   Die Zerlegung *n* ist selbständig so zu wählen, dass mit möglichst wenig Rechenaufwand ein korrektes Ergebnis erreicht wird.
   Bemerkung: *f(x)* ist eine quadratische Spline-Funktion.

   Lösung:
   Da die zu integrierende Funktion aus zwei Teilfunktionen besteht, muss jede Teilfunktion vollständig mit mindestens einer Parabelfläche erfasst werden (vgl. auch Aufgabe 2.) .Daraus ergeben sich für den ersten Definitionsbereich eine Schrittweite h=1. Diese wird auch für den zweiten Definitionsbereich angewandt. Wir erhalten somit den Integralwert:

$$h=1$$
$$n=\frac{b-a}{h}=\frac{4-(-2)}{1}=6$$
$$S(6)=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4\left(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)\right)+2\left(f(x_2)+f(x_4)\right)+f(x_6)\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(4+4(1-1-9)+2(0-4)-16\right)=\underline{\underline{-18.666\ldots}}$$

   Für die Fläche sind die Beträge der Funktion *f(x)* relevant:

$$h=1$$
$$n=\frac{b-a}{h}=\frac{4-(-2)}{1}=6$$
$$A=S(6)=\frac{h}{3}\left(|f(x_0)|+4\left(|f(x_1)|+|f(x_3)|+|f(x_5)|\right)+2\left(|f(x_2)|+|f(x_4)|\right)+|f(x_6)|\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(4+4(1+1+9)+2(0+4)+16\right)=\underline{\underline{24}}$$

2. Ist eine Zerlegung von *n*=2 möglich. Wenn nein, warum nicht?

   Lösung:
   Berechnen und schauen ob der Wert stimmt:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-(-2)}{2}=3$$
$$S(2)=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)=(-2)^2+4\cdot\left(-\left(1^2\right)\right)+\left(-\left(4^2\right)\right)=4-4-16=-16$$

   Der Wert ist offensichtlich falsch. Bei stückweise definierten Funktionen muss pro Definitionsbereich mindestens eine Rechnung erfolgen.