U19DGL Ordnungsreduktion und DGL-Systeme

Aufgaben

1. Lösen Sie das DGL-System mit dem Verfahren von Euler:

$$y'_1 = 2xy_1 + 3 \qquad x \in [0,1], h = 0.1$$
$$y'_2 = \cos(x+2)\sin(y_1) \qquad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$$

Lösung:

Vorgaben:

$$y_1(0) = y_{10} = 0 \qquad h = 0.1$$
$$y_2(0) = y_{20} = 1$$

Eulerschritte:

$y_1(0.1)$: $y_{11} = y_{10} + h \cdot y'_1(x_0, y_{10}) = y_{10} + h(2x_0 y_{10} + 3)$
$= 0 + 0.1(2 \cdot 0 \cdot 1 + 3) = 0.3$

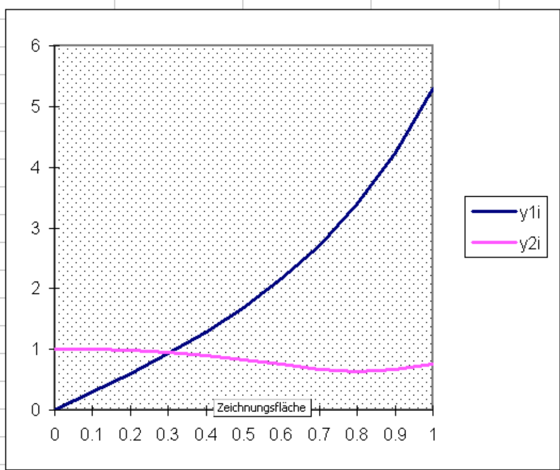
$y_2(0.1)$ $y_{21} = y_{20} + h \cdot y'_2(x_0, y_{10}) = y_{20} + h \cdot (\cos(x_0 + 2)\sin(y_{10}))$
$= 1 + 0.1(\cos(0+2)\sin(0)) = 1$

$y_1(0.2)$: $y_{12} = y_{11} + h \cdot y'_1(x_1, y_{11}) = y_{11} + h(2x_1 y_{11} + 3)$
$= 0.3 + 0.1(2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 + 3) = 0.606$

$y_2(0.2)$: $y_{22} = y_{21} + h \cdot y'_2(x_1, y_{11}) = y_{21} + h \cdot (\cos(x_1 + 2)\sin(y_{11}))$
$= 1 + 0.1(\cos(0.1+2)\sin(0.3)) = 0.985$

Die Excel-Tabelle wird:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	IAM Übung 19: Lösung eines DGL-Systems mit 2 DGL erster Ordnung							
2	Aufgabe 1.)	$y'_1 = 2xy_1 + 3$		$x \in [0,1], h = 0.1$				
3								
4		$y'_2 = \cos(x+2)\sin(y_1)$		$y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$				
5								
6	y_{10} =	0		h =	0.1			
7	y_{20} =	1						
8	x_0 =	0						
9								
10	i	x_i	y_{1i}	y_{2i}				
11	0	0	0.0000	1.0000				
12	1	0.1	0.3000	1.0000				
13	2	0.2	0.6060	0.9851				
14	3	0.3	0.9302	0.9516				
15	4	0.4	1.2861	0.8981				
16	5	0.5	1.6889	0.8274				
17	6	0.6	2.1578	0.7478				
18	7	0.7	2.7168	0.6765				
19	8	0.8	3.3971	0.6392				
20	9	0.9	4.2407	0.6630				
21	10	1	5.3040	0.7495				
22								
23								
24								



2. Lösen Sie folgende DGL mit einem Taylorreihenverfahren 3.Ordnung:

$$y' = 3x^2 y \qquad x \in [0,2], h = 0.1 \qquad y(0) = 1$$

Lösung:

$y' = 3x^2 y \qquad (Vorgabe)$

$y'' = 6xy + 3x^2 y'$

$y''' = 6y + 12xy' + 3x^2 y''$

Taylorformel 3.Ordnung:

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n, y_n)$$

Berechnung:

$y_0 = 0 \quad (Vorgabe)$

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0, y_0) + + \frac{h^2}{2} y''(x_0, y_0) + \frac{h^3}{6} y'''(x_0, y_0)$$

$$= 1 + 0.1\left(3 \cdot 0^2 \cdot 1\right) + \frac{0.1^2}{2}\left(6 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2\left(3 \cdot 0^2 \cdot 1\right)\right) + \frac{0.1^3}{6}\left(6 \cdot 1 + 12 \cdot 0 \cdot \left(3 \cdot 0^2 \cdot 1\right) + 3 \cdot 0^2\left(6 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2\left(3 \cdot 0^2 \cdot 1\right)\right)\right)$$

$$= 1.001$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot y'(x_1, y_1) + + \frac{h^2}{2} y''(x_1, y_1) + \frac{h^3}{6} y'''(x_1, y_1)$$

$$= 1.001 + 0.1\left(3 \cdot 0.1^2 \cdot 1.001\right) + \frac{0.1^2}{2}\left(6 \cdot 0.1 \cdot 1.001 + 3 \cdot 0.1^2\left(3 \cdot 0.1^2 \cdot 1.001\right)\right) + \frac{0.1^3}{6}\left(6 \cdot 1 + 12 \cdot 0.1\left(3 \cdot 0.1^2 \cdot 1.001\right) + 3 \cdot 0.1^2\left(6 \cdot 0.1 \cdot 1.001 + 3 \cdot 0.1^2\left(3 \cdot 0.1^2 \cdot 1.001\right)\right)\right) =$$

$$=$$

Die weiteren Rechnungen werden mit der Excel-Tabelle:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	IAM Übung 19: Taylorreihenverfahren dritter Ordnung								
2	Aufgabe 2.)	$y' = 3x^2 y$		$x \in [0,2], h = 0.1$		$y(0) = 1$			
3									
4	y_0 =	1		h =	0.1				
5	x_0 =	0							
6									
7	i	x_i	y'_i	y''_i	y'''_i	y_i		Analyt. Lösung e^x_i^3	
8	0	0				1		1.0000	
9	1	0.1	0.000	0.000	6.000	1.001		1.0010	
10	2	0.2	0.030	0.602	7.225	1.008		1.0080	
11	3	0.3	0.121	1.224	8.616	1.028		1.0274	
12	4	0.4	0.278	1.925	10.387	1.067		1.0661	
13	5	0.5	0.512	2.807	12.871	1.134		1.1331	
14	6	0.6	0.851	4.041	16.643	1.242		1.2411	
15	7	0.7	1.342	5.922	22.796	1.410		1.4092	
16	8	0.8	2.073	8.969	33.489	1.668		1.6686	
17	9	0.9	3.202	14.153	53.190	2.068		2.0730	
18	10	1	5.024	23.374	91.533	2.702		2.7183	
19									

3. Lösen Sie mit Hilfe einer Ordnungsreduktion und dem Verfahren von Euler:

$$y'''(x) = 2\cos^2(x) + 1$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \qquad x \in [0,1], h = 0.1$$

Lösung:

$$z'_1 = y' = z_2$$
$$z'_2 = y'' = z_3$$
$$z'_3 = y''' = 2\cos^2(x) + 1$$

Startwerte gemäss Vorgabe:

$$z_{10} = y_0 = 0 \qquad h = 0.1$$
$$z_{20} = z'_{10} = y'(0) = 0$$
$$z_{30} = z'_{20} = y''(0) = 0$$

Euler – Schritt 1:

$$z_{31} = z_{30} + hz'_3(x_0) = z_{30} + hz'_{30} = 0 + 0.1\left(2\cos^2(0) + 1\right) = 0.3$$
$$z_{21} = z_{20} + hz'_{20} = z_{20} + hz_{30} = 0 + 0.1 \cdot 0 = 0$$
$$z_{11} = z_{10} + hz'_{10} = z_{10} + hz_{20} = 0 + 0.1 \cdot 0 = 0$$

Euler – Schritt 2:

$$z_{32} = z_{31} + hz'_3(x_1) = z_{31} + hz'_{31} = 0.3 + 0.1\left(2\cos^2(0.1) + 1\right) = 0.5980066$$
$$z_{21} = z_{21} + hz'_{21} = z_{21} + hz_{31} = 0 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.3$$
$$z_{11} = z_{11} + hz'_{11} = z_{11} + hz_{21} = 0 + 0.1 \cdot 0 = 0$$

Die weiteren Werte werden mit der Excel-Tabelle:

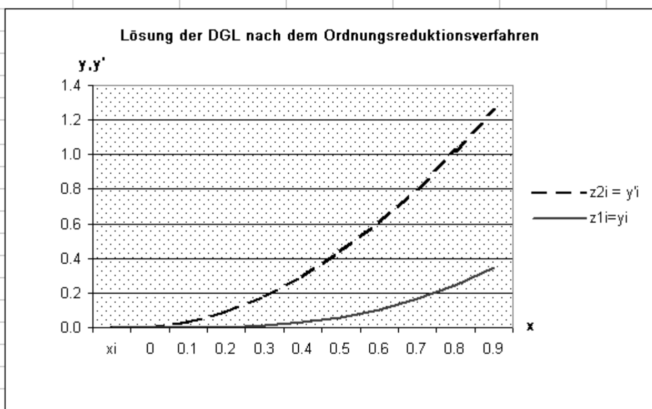
IAM Übung 19: Ordnungsreduktionsverfahren

Aufgabe 3.) $y'''(x) = 2\cos^2(x) + 1$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \qquad x \in [0,1], h = 0.1$

$y_0 =$	0		h =	0.1
$y'_0 =$	0			
$y''_0 =$	0			
$x_0 =$	0			

i	x_i	$z_{3i} = y''_i$	$z_{2i} = y'_i$	$z_{1i} = y_i$
0	0	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.1	0.300000	0.000000	0.000000
2	0.2	0.598007	0.030000	0.000000
3	0.3	0.890113	0.089801	0.003000
4	0.4	1.172646	0.178812	0.011980
5	0.5	1.442317	0.296077	0.029861
6	0.6	1.696347	0.440308	0.059469
7	0.7	1.932583	0.609943	0.103500
8	0.8	2.149580	0.803201	0.164494
9	0.9	2.346660	1.018159	0.244814
10	1	2.523940	1.252825	0.346630



4. Wie gross wird der maximale Fehler aus 3.) wenn die allgemeine analytische Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y(x) = \frac{1}{24}\left(8x^3 - 3\sin(2x)\right) + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 ?$$

Lösung:
Zuerst werden in der allgemeinen Lösung $c_1..c_3$ bestimmt. Diese müssen so beschaffen sein, dass die Anfangswerte eingehalten werden. Anschliessend kann der maximale Fehler berechnet werden, indem man die Differenz zwischen der exakten Lösung und dem Näherungsverfahren bestimmt.

$$y(x_0) = \frac{1}{24}\left(8{x_0}^3 - 3\sin(2x_0)\right) + c_1 + c_2 x_0 + c_3 {x_0}^2 = 0$$

$$y'(x_0) = {x_0}^2 - \frac{1}{4}\cos(2x_0) + c_2 + 2c_3 x_0 = 0$$

$$y''(x_0) = 2x_0 + \frac{1}{2}\sin(2x_0) + 2c_3 = 0$$

Daraus folgt:

$$c_3 = -x_0 - \frac{1}{4}\sin(2x_0) = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\cos(2x_0) - 2c_3 x_0 - {x_0}^2 = \frac{1}{4}\cdot 1 - 2\cdot 0 - 0^2 = \frac{1}{4}$$

$$c_1 = -\frac{1}{24}\left(8{x_0}^3 - 3\sin(2x_0)\right) - c_2 x_0 - c_3 {x_0}^2 = 0$$

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte wird also:

$$y(x) = \frac{1}{24}\left(8x^3 - 3\sin(2x)\right) + \frac{1}{4}x$$

$$y(x = 1.0) = \frac{1}{24}\left(8\cdot 1^3 - 3\sin(2)\right) + \frac{1}{4} = 0.46967115498$$

$$\varepsilon = \tilde{y} - y = 0.34663 - 0.46967115498 = \underline{-0.1230411}$$