U4 Interpolationsrechnung II

Umfeld

Mit Hilfe von Interpolationsfunktionen können Datenwerte exakt in Ihren Entwicklungspunkten dargestellt werden. Häufig werden aufgrund der einfachen, systematischen Berechnung Polynome als Interpolationsfunktion gewählt.
Wir haben dazu zwei Arten von polynomialen Interpolationen kennengelernt:

Lagrange-Interpolation (Berechnung über Lagrangepolynome L_i)

$$\lambda_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \begin{array}{l} i\text{: } 0\ldots\text{n} \\ n\text{: Anzahl Datenpunkte} - 1 \end{array}$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; \lambda_i \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; L_i(x)$$

Newton-Interpolation (Rekursiver Ansatz):

$$y_0 = p(x_0) = c_0 \qquad \rightarrow c_0 = y_0 \qquad \text{(Rekursionsanfang)}$$

$$y_1 = p(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \qquad \rightarrow c_1 = \frac{y_1 - c_0}{(x_1 - x_0)}$$

$$y_2 = p(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \qquad \rightarrow c_2 = \frac{y_2 - c_0 - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

...

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Beide Methoden unterscheiden sich im Ansatz und Vorgehen. Selbstverständlich liefern sie aber die gleichen Interpolationspolynome für dieselben Datenpunkte.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die $L_i(x)$ und λ_i sowie $p_2(x)$ für die Datenpunkte:

x	1	2	3
y	-1	2	1

2. Bestimmen Sie $p(x)$ für die nachfolgende Punktemenge nach Lagrange. Die Polynomkoeffizienten sind in absteigender Reihenfolge zu sortieren.

x	0	1	4
y	2	-1	2

3. Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom für die folgenden Datenpunkte:

x	0	1	2	3
y	1	0	2	1