Gauss-Jordan Algorithmus

Umfeld

Der Gauss-Jordan Algorithmus dient dazu um die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems in Dreieckform zu bringen.

Dazu werden drei Elementaroperationen zur Umformung verwendet:

- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition zweier Zeilen
- Vertauschen zweier Zeilen

Das *Pivotelement* ist das Element in der Diagonale nach dem eliminiert wird. Bei der Reduktion muss sichergestellt sein, dass das Pivotelement immer != 0 ist. Wird aus irgendeinem Grunde das Pivotelement zu Null, muss durch Zeilenvertauschung unter den verbleibenden Zeilen ein Pivotelement != 0 erreicht werden.

Bei beschränkter Rechengenauigkeit kommt deshalb der Wahl des optimalen Pivots besondere Bedeutung zu. Eine Möglichkeit das Pivotelement zu wählen, ist die sog. relative Kolonnenmaximumstrategie. Unter zur Elimination verbleibenden möglichen Zeilen wird diejenige Pivotzeile ausgewählt, die die grösste relative Summe der Beträge einer Zeile hat:

Aufgaben

1. Lösen Sie mit Hilfe des Gauss-Jordan Algorithmus das nachfolgende Gleichungssystem: Praktizieren Sie sowohl die Methode des Rückwärtseinsetzens wie auch die Methode "Gauss-rückwärts" um alle Unbekannten zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & - & z & = & 16 \end{array}$$

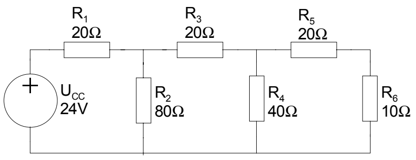
2. Wie sehen die auf Dreieckform reduzierten erweiterten Koeffizientenmatrizen vom Charakter her aus, wenn

   (a) mehrere, (b) genau eine, (c) keine Lösungen existieren?

3. Untersuchen Sie das folgende Gleichungssystem bezüglich der Lösung indem Sie den Gauss-Algorithmus anwenden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Bestimmen Sie alle Ströme indem Sie die zum System gehörende erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen und mit Gauss-Jordan lösen.



Kontrollieren Sie Ihr Resultat indem sie mit dem Taschenrechner die inverse Koeffizientenmatrix bestimmen und die Lösung über den Ansatz $\underline{x}=A^{-1}\cdot\underline{b}$ bestimmen.

5. Für welche Werte von α,β hat das System

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & \beta \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

a.) keine Lösung
b.) unendlich viele Lösungen
c.) genau eine Lösung

6. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit relativer Kolonnenmaximumstrategie und zweistelliger Gleitkomma-Arithmetik. D.h. jede Rechnung exakt rechnen und nachher auf zwei Stellen runden.

$$A\cdot\underline{x}=\underline{b} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. Mit einer geeigneten Umformung können lineare Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten in ein äquivalentes Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten übergeführt werden.
Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem indem Sie das zugehörige reelle Gleichungssystem bestimmen und mit Gauss lösen.

$$2x-y=-2+10j$$
$$8x+y=12$$