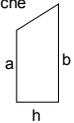


Numerische Integration: Trapezregel

Aufgabe

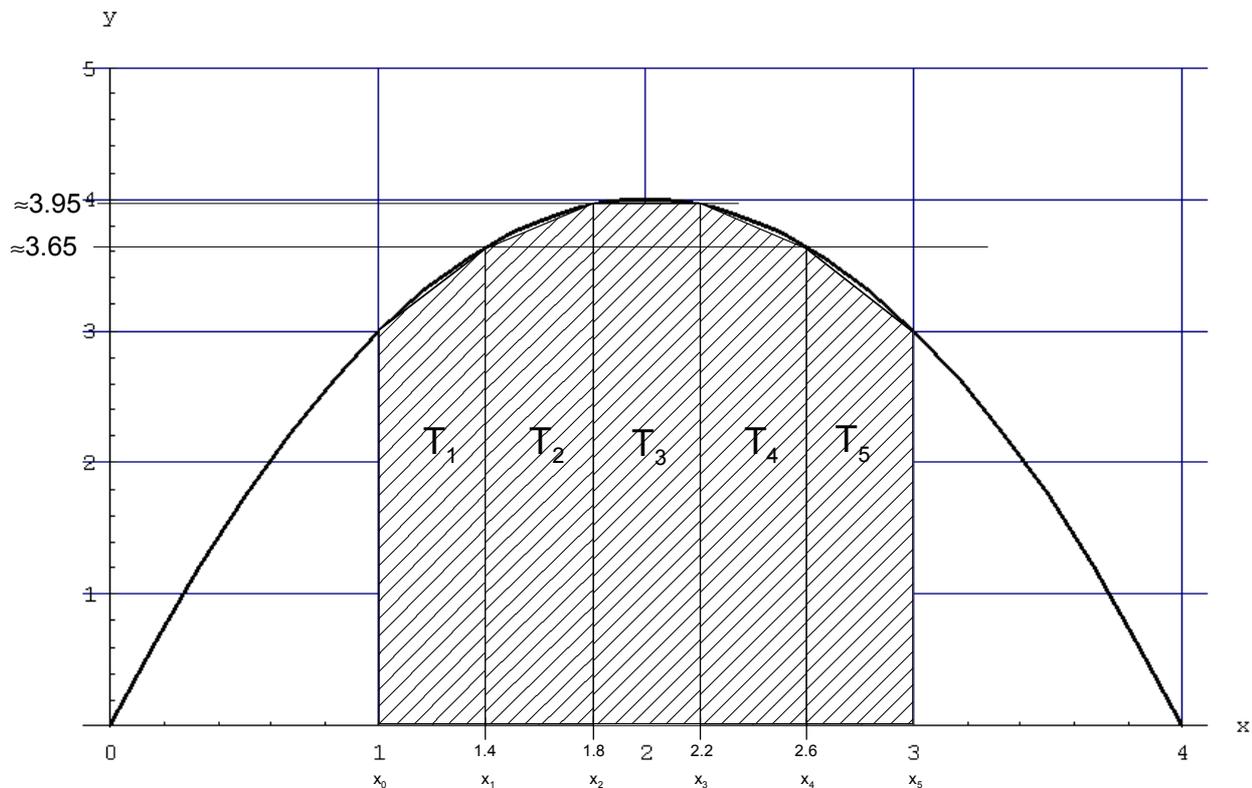
Bestimmen des Wertes $\int_1^3 -x^2 + 4x \, dx$ durch

Hinweis: Trapezfläche

$$A = \frac{b+a}{2} h$$


- Aufsummieren der einzelnen Trapezflächen indem die einzelnen Trapezflächen von Hand eingezeichnet und bestimmt werden.
- Anwenden der Trapezsummenformel. Bestimmen Sie die $f(x_i)$ durch Auswerten der Funktion.
- Wie gross wird der relative Fehler der Integralnäherung aus b.) ?

Vorgabe: Anzahl Teilflächen $n=5$



Vorgehen:

- Bestimmen der Schrittweite h und Einzeichnen der Einzeltrapeze. Anschliessend werden die Teilflächen berechnet. Die Trapezseitenhöhen bei $x_i=x_4$, $x_2=x_3$ werden näherungsweise aus der Grafik gelesen.

$$h = \frac{x_5 - x_0}{5} = \frac{4 - 1}{5} = 0.4$$

$$T_1 = \frac{3 + 3.65}{2} \cdot 0.4 = 1.33$$

$$T_2 = \frac{3.65 + 3.95}{2} \cdot 0.4 = 1.52$$

$$T_3 = \frac{3.95 + 3.95}{2} \cdot 0.4 = 1.58$$

$$T_4 = \frac{3.95 + 3.65}{2} \cdot 0.4 = 1.52$$

$$T_5 = \frac{3.65 + 3}{2} \cdot 0.4 = 1.33$$

$$\tilde{I} = \sum_{i=1}^5 T_i = 1.33 + 1.52 + 1.58 + 1.52 + 1.33 = \underline{7.28}$$

b.) Bestimmen der Schrittweite h und Anwenden der allgemeinen Trapezsummenformel:

$$h = \frac{x_5 - x_0}{n} = \frac{4 - 1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

$$\begin{aligned} \tilde{I} = T(5) &= h \left[\frac{1}{2} \left(f(x_0) + f(x_5) + \sum_{i=1}^4 f(x_i) \right) \right] = \frac{2}{5} \left[\frac{1}{2} \left((f(1) + f(4)) + f(1.4) + f(1.8) + f(2.2) + f(2.6) \right) \right] \\ &= \frac{2}{5} \cdot 18.2 = \underline{7.28} \end{aligned}$$

c.) Bestimmen des exakten Integralwertes über die Stammfunktion und Ausrechnen des relativen Fehlers:

$$I = \int_1^3 -x^2 + 4x \, dx = \left. \frac{-1}{3}x^3 + 2x^2 \right|_1^3 = \frac{22}{3} \approx 7.333$$

$$\delta = \frac{\tilde{I} - I}{I} = \frac{7.28 - \frac{22}{3}}{\frac{22}{3}} \approx \underline{-0.00727}$$