U5 Gauss-Jordan Algorithmus

Aufgaben

1. Lösen Sie mit Hilfe des Gauss-Jordan Algorithmus das nachfolgende Gleichungssystem: Praktizieren Sie sowohl die Methode des Rückwärtseinsetzens wie auch die Methode "Gauss-Rückwärts" um alle Unbekannten zu bestimmen.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & - & z & = & 16 \end{array}$$

Lösung mit Rückwärts einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}(-3)(-5) \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{52}{7} & \frac{104}{7} \end{pmatrix}(-11/7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -2$$

$$x_2 = \frac{5+13x_3}{7} = \frac{5-26}{7} = \frac{-21}{7} = -3$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(5+3x_3-x_2) = \frac{1}{2}(5-6+3) = 1$$

Lösung mit Gauss-Rückwärts:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}(-3)(-5) \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{52}{7} & \frac{104}{7} \end{pmatrix}(-11/7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}(13)(3/2) \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 7 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}(-\frac{1}{2}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Für welche Werte von α, β hat das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & \beta \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

a.) keine Lösung
b.) unendlich viele Lösungen
c.) genau eine Lösung

Lösung:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3+\beta \\ 0 & 1+\alpha & 1-\alpha & 1-3\alpha \end{pmatrix} (-1)(-\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3+\beta \\ 0 & 0 & 4-2\alpha & 3+\alpha-\beta-\alpha\beta \end{pmatrix} (-1/3-\alpha/3)$$

Besserer Weg: α in die letzte Koeffizientenspalte bringen:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (0),(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 2 & -2+\alpha & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & -3+\alpha & -2-\beta \end{pmatrix} (-1)$$

$z = \dfrac{2+\beta}{\alpha-3}$

$\alpha = 3, \beta \neq -2$ keineLsg

$\alpha = 3, \beta = -2$ ∞viele Lsg

$\alpha \neq 3, \beta \neq -2$ eine Lsg

3. Wie sehen die auf Dreieckform reduzierten erweiterten Koeffizientenmatrizen vom Charakter her aus, wenn

(a) mehrere, (b) genau eine, (c) keine Lösungen existieren?

Lösung:

unendlich viele Lsg.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

keine Lsg.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & y \end{array}\right)$$

$y \neq 0$

Genau eine Lsg.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & x & y \end{array}\right)$$

$x \neq 0, y \in \mathrm{R}$

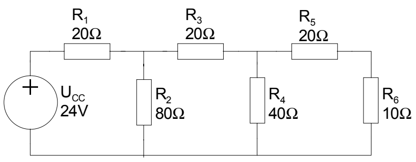
4. Untersuchen Sie das folgende Gleichungssystem bezüglich der Lösung indem Sie den Gauss-Algorithmus anwenden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduktion auf Dreieckform und interpretieren des Schlusstableau bezüglich der Lösungsmenge:

$$\begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & -1 & 1 \;\; (-0.5) - 0.5) \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|l} & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \to & 0 & -2.5 & 1.5 & 1.5 \;\; (1) \\ & 0 & 2.5 & -1.5 & -0.5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|l} & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \to & 0 & -2.5 & 1.5 & 1.5 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \to \text{Widerspruch!} \end{array}$$

5. Bestimmen Sie alle Ströme indem Sie die zum System gehörende erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen und mit Gauss-Jordan lösen.



Kontrollieren Sie Ihr Resultat indem sie mit dem Taschenrechner die inverse Koeffizientenmatrix bestimmen und die Lösung über den Ansatz $\underline{x}=A^{-1}\cdot\underline{b}$ bestimmen.

Lösung:

Knotenansatz mit den Strömen I_1, I_3, I_5:

$$\begin{aligned} A:&\quad U = I_1R_1 + R_2(I_1 - I_3) = I_1(R_1 + R_2) - I_3R_3 \\ B:&\quad 0 = I_3R_3 + (I_3 - I_1)R_4 - (I_1 - I_3)R_2 \\ &\quad\;\; = -I_1R_2 + I_3(R_2 + R_3 + R_4) - I_5R_4 \\ C:&\quad 0 = I_5R_5 + I_5R_6 - (I_3 - I_5)R_4 \\ &\quad\;\; = -I_3R_4 + I_5(R_4 + R_5 + R_6) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_3+R_4+R_5) & -R_4 \\ 0 & -R_4 & (R_4+R_5+R_6) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 100 & -80 & 0 \\ -80 & 140 & -40 \\ 0 & -40 & 70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 100 & -80 & 0 & 24 \\ -80 & 140 & -40 & 0 \\ 0 & -40 & 70 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|l} & 1 & -0.8 & 0 & 0.24 \\ \to & 0 & 76 & -40 & 19.2 \\ & 0 & -40 & 70 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|l} & 1 & -0.8 & 0 & 0.24 \\ \to & 0 & 1 & {}^{-40}\!/_{76} & {}^{19.2}\!/_{76} \\ & 0 & 0 & {}^{3720}\!/_{76} & {}^{768}\!/_{76} \end{array}$$

$$I_5 = \frac{b'_3}{a'_{33}} = \frac{768}{3720} \approx 0.20645A$$

$$I_3 = b'_2 - a'_{23}\,I_5 = \frac{19.2}{76} + \frac{40}{76}\frac{768}{3720} \approx 0.36129A$$

$$I_1 = b_1 - a'_{12}\,I_3 = 0.24 + 0.8 \cdot 0.36129 \approx 0.529A$$