U7 Gauss-Jordan Algorithmus

Aufgaben

1. Lösen Sie mit Hilfe des Gauss-Jordan Algorithmus das nachfolgende Gleichungssystem: Praktizieren Sie sowohl die Methode des Rückwärtseinsetzens wie auch die Methode "Gauss-Rückwärts" um alle Unbekannten zu bestimmen.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & - & z & = & 16 \end{array}$$

Lösung mit rückwärts Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} (-3)(-5) \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{52}{7} & \frac{104}{7} \end{pmatrix} (-11/7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -2$$

$$x_2 = \frac{5 + 13x_3}{7} = \frac{5 - 26}{7} = \frac{-21}{7} = -3$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(5 + 3x_3 - x_2) = \frac{1}{2}(5 - 6 + 3) = 1$$

Lösung mit Gauss-Rückwärts:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} (-3)(-5) \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{52}{7} & \frac{104}{7} \end{pmatrix} (-11/7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} (13)(3/2) \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 7 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} (-\frac{1}{2}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Wie sehen die auf Dreieckform reduzierten erweiterten Koeffizientenmatrizen vom Charakter her aus, wenn

   (a) mehrere, (b) genau eine, (c) keine Lösungen existieren?

   Lösung:

unendlich viele Lsg.	keine Lsg.	Genau eine Lsg.
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & y \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & x & y \end{array}\right)$
	$y \neq 0$	$x \neq 0, y \in \mathrm{R}$

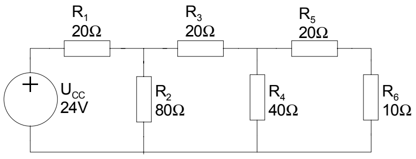
3. Untersuchen Sie das folgende Gleichungssystem bezüglich der Lösung indem Sie den Gauss-Algorithmus anwenden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Lösung:
   Reduktion auf Dreieckform und interpretieren des Schlusstableau bezüglich der Lösungsmenge:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \;\; (-0.5)\,-0.5) \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ \to 0 & -2.5 & 1.5 & 1.5 \;\; (1) \\ 0 & 2.5 & -1.5 & -0.5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ \to 0 & -2.5 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \to \text{Widerspruch!} \end{array}$$

4. Bestimmen Sie alle Ströme indem Sie die zum System gehörende erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen und mit Gauss-Jordan lösen.



Kontrollieren Sie Ihr Resultat indem sie mit dem Taschenrechner die inverse Koeffizientenmatrix bestimmen und die Lösung über den Ansatz $\underline{x}=A^{-1}\cdot\underline{b}$ bestimmen.

Lösung:
Knotensansatz mit den Strömen I_1, I_3, I_5:

$$
\begin{aligned}
A\text{:}\quad & U = I_1R_1 + R_2(I_1 - I_3) = I_1(R_1 + R_2) - I_3R_3 \\
B\text{:}\quad & 0 = I_3R_3 + (I_3 - I_1)R_4 - (I_1 - I_3)R_2 \\
& \;= -I_1R_2 + I_3(R_2 + R_3 + R_4) - I_5R_4 \\
C\text{:}\quad & 0 = I_5R_5 + I_5R_6 - (I_3 - I_5)R_4 \\
& \;= -I_3R_4 + I_5(R_4 + R_5 + R_6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} (R_1+R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_3+R_4+R_5) & -R_4 \\ 0 & -R_4 & (R_4+R_5+R_6) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 100 & -80 & 0 \\ -80 & 140 & -40 \\ 0 & -40 & 70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c} 100 & -80 & 0 & 24 \\ -80 & 140 & -40 & 0 \\ 0 & -40 & 70 & 0 \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.8 & 0 & 0.24 \\ 0 & 76 & -40 & 19.2 \\ 0 & -40 & 70 & 0 \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.8 & 0 & 0.24 \\ 0 & 1 & -40/76 & 19.2/76 \\ 0 & 0 & 3720/76 & 768/76 \end{array}
$$

$$I_5 = \frac{b'_3}{a'_{33}} = \frac{768}{3720} \approx 0.20645A$$

$$I_3 = b'_2 - a'_{23}\, I_5 = \frac{19.2}{76} + \frac{40}{76}\frac{768}{3720} \approx 0.36129A$$

$$I_1 = b_1 - a'_{12}\, I_3 = 0.24 + 0.8 \cdot 0.36129 \approx 0.529A$$

5. Für welche Werte von α,β hat das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & \beta \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

a.) keine Lösung
b.) unendlich viele Lösungen
c.) genau eine Lösung

Lösung:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3+\beta \\ 0 & 1+\alpha & 1-\alpha & 1-3\alpha \end{pmatrix} (-1)(-\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3+\beta \\ 0 & 0 & 4-2\alpha & 3+\alpha-\beta-\alpha\beta \end{pmatrix} (-1/3-\alpha/3)$$

Besserer Weg: α in die letzte Koeffizientespalte bringen:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (0),(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 2 & -2+\alpha & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & -3+\alpha & -2-\beta \end{pmatrix} (-1)$$

$$z = \frac{2+\beta}{\alpha-3}$$

$\alpha = 3, \beta \neq -2$ keineLsg

$\alpha = 3, \beta = -2$ ∞viele Lsg

$\alpha \neq 3, \beta \neq -2$ eine Lsg

6. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit relativer Kolonnenmaximumstrategie und zweistelliger Gleitkomma-Arithmetik. D.h. jede Rechnung exakt rechnen und nachher auf zwei Stellen runden.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\left(A|b\right)^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$s_1 = \sum |a_{1i}| = 1+3+4 = 8 \qquad q_1 = \frac{a_{11}}{s_1} = \frac{1}{8} = 0.13$$

$$s_2 = \sum |a_{2i}| = 3+2+1 = 6 \qquad q_2 = \frac{a_{21}}{s_2} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$s_3 = \sum |a_{3i}| = 4+1+1 = 6 \qquad q_3 = \frac{a_{31}}{s_3} = \frac{4}{6} = 0.67$$

$$\max_{i=1,2,3}\{q_i\} = \max\{0.13, 0.50.67\} = 0.67 \qquad \rightarrow \text{Zeile 3 wird Pivotzeile}$$

$$\left(A|b\right)^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) (-0.75)(-0.25) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1.25 & -1.75 & 0.75 \\ 0 & 2.75 & -4.25 & 1.25 \end{array}\right) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1.3 & -1.8 & 0.8 \\ 0 & 2.8 & -4.3 & 1.3 \end{array}\right)$$

$$s_2 = \sum |a_{2i}| = 1.3+1.8 = 3.1 \qquad q_2 = \frac{a_{22}}{s_2} = \frac{1.3}{3.1} = 0.42$$

$$s_3 = \sum |a_{3i}| = 2.8+4.3 = 7.1 \qquad q_3 = \frac{a_{32}}{s_3} = \frac{2.8}{7.1} = 0.39$$

$$\max_{i=2,3}\{q_i\} = \max\{0.42, 0.39\} \qquad \rightarrow \text{Keine Vertauschung notwendig}$$

$$\left(A|b\right)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1.3 & -1.8 & 0.8 \\ 0 & 2.8 & -4.3 & 1.3 \end{array}\right) \quad (-2.2) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1.3 & -1.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.45 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{b'_3}{a'_{33}} = \frac{0.45}{0.3} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{32}\,x_3}{a'_{22}} = \frac{0.8 + 1.8 \cdot 1.5}{1.3} = 2.69 \rightarrow 2.7$$

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{13}\,x_3 - a'_{12}\,x_2}{a'_{11}} = \frac{-1 - 2.7 - 1.5}{4} = -1.3$$

7. Mit einer geeigneten Umformung können lineare Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten in ein äquivalentes Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten übergeführt werden.
Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem indem Sie das zugehörige reelle Gleichungssystem bestimmen und mit Gauss lösen.

$$2x - y = -2 + 10j$$
$$8x + y = 12$$

Lösung:
Umformen des komplexen Gleichungssystems in ein äquivalentes Gleichungssystem mit rein reellen Koeffizienten nach Gl. (4.21). Lösung des 4x4 Systems mit Gauss und Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(x) \\ \mathrm{Im}(x) \\ \mathrm{Re}(y) \\ \mathrm{Im}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 10 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \to \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 20 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\to \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -40 \end{array}$$

$$\mathrm{Im}(y) = \frac{b_4}{A_{44}} = \frac{-40}{5} = -8$$

$$\mathrm{Re}(y) == \frac{20 - 0}{5} = 4$$

$$\mathrm{Im}(x) = \frac{b_2 - A_{24} \cdot b_4 - A_{23} \cdot b_3}{A_{22}} = \frac{10 - \left((-1) \cdot (-8)\right) - 0}{2} = 1$$

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{b_1 - A_{14} \cdot b_4 - A_{13} \cdot b_3 - A_{12} \cdot b_2}{A_{11}} = \frac{-2 - 0 - (-1) \cdot 4 - 0}{2} = 1 \qquad \mathit{Lösung}: \begin{array}{l} x = 1 + j \\ y = 4 - 8j \end{array}$$