

Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Verständnisfragen

- Welche Bedingung(en) muss an ein DGL gestellt werden damit sie mit dem Verfahren von Euler oder Runge-Kutta gelöst werden kann?

Antwort:

Die DGL muss erster Ordnung sein.

Die DGL muss explizit nach der Ableitung aufgelöst werden können.

Die Anfangswerte müssen bekannt sein.

- Können auch DGL höherer Ordnung mit diesen Verfahren gelöst werden. Wenn ja, beschreiben Sie wie das prinzipiell vor sich geht!

Antwort:

Mit den bisher gezeigten Verfahren können nur DGL und DGL-Systeme erster Ordnung gelöst werden. Zur Lösung DGL höherer Ordnung wendet man ein Ordnungsreduktionsverfahren an.

Dieses zerlegt systematisch eine DGL n -ter Ordnung in ein System von n DGL erster Ordnung, die dann mit den gezeigten Verfahren gelöst werden können.

- Welche grossen Vorteil weist das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gegenüber ein Taylorreihenverfahren gleicher Ordnung auf?

Antwort:

Beim Taylorreihenverfahren 4. Ordnung müssen die 2., 3. und 4. Ableitung zur Berechnung vorliegen. Diese müssen also zuvor aus der DGL bestimmt werden. Je nach DGL können die Ableitungen sehr aufwendig werden sowohl in der Herleitung, wie auch in der Auswertung bei jedem Rechenschritt. Das Runge-Kutta-Verfahren, z.B. RK4 berechnet mit annähernd gleicher Genauigkeit die Lösungsfunktion wie ein Taylorreihenverfahren 4. Ordnung, ohne dass jedoch höhere Ableitungen vorliegen müssen.

- Wie sind die Grössen a , b , c , d beim Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung zu interpretieren?

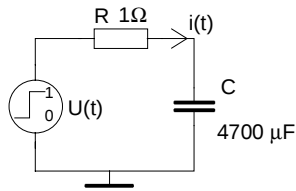
Antwort:

Die Grössen verkörpern numerische Ableitungswerte, die einen Zusammenhang mit der 1., bis 4. Ableitung haben. Eine nähere Aussage findet man in der Praxisaufgabe d.).

Praxisaufgaben

Ermitteln Sie die numerische Lösung der durch die nachfolgende Schaltung beschriebenen Differentialgleichung für den Strom $i(t)$.

(Zum Zeitpunkt $t=0$ schaltet die Spannung von 0V auf 1V und bleibt konstant.)



- a.) Bestimmen Sie die Lösungsfunktion für $t=0..20ms$ mit einer Schrittweite von $2ms$ nach der Methode von Euler, indem Sie alle Werte konkret bestimmen und daraus eine Wertetabelle erstellen!

Lösung:

Herleiten der DGL mit einer Masche und anschliessendes Differenzieren. Da $U(t)$ konstant ist, fällt dieser Term weg.

$$U(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$T = RC$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = 0, \text{ da } U(t) = \text{konstant}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} i(t) = -\frac{1}{T} i(t)$$

Anwenden der Formel von Euler um die Lösungsfunktion sukzessiv zu entwickeln:

$$y'(x, y) = f(x, y)$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

konkret für diese Aufgabe:

$$i_0 = i(t=0) = 1A$$

$$i_{n+1} = i_n - h \frac{1}{RC} i_n = i_n \left(1 - \frac{h}{RC} \right)$$

Numerische Werte siehe EXCEL Diagramm.

- b.) Wie gross ist der relative Fehler für $i(20ms)$ für dieses Verfahren?

Lösung:

Wert: Siehe EXCEL-Diagramm.

- c.) Bestimmen $i(t=4ms)$ nach dem Verfahren Runge-Kutta 4. Ordnung.

Lösung:

Lösung mit dem Taylorreihenverfahren 4. Ordnung:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + \frac{h^4}{24} y^{(4)}_n$$

$$y' = \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{T} i(t)$$

$$y'' = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{T} i(t) \right) = -\frac{1}{T} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{T^2} i(t)$$

$$y''' = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{T} \frac{di(t)}{dt} \right) = -\frac{1}{T} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\frac{1}{T^3} i(t)$$

$$y^{(4)} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{T} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} \right) = -\frac{1}{T} \frac{d^3 i(t)}{dt^3} = \frac{1}{T^4} i(t)$$

$$i_{n+1} = i_n - \frac{h}{T} i_n + \frac{h^2}{2 T^2} i_n - \frac{h^3}{6 T^3} i_n + \frac{h^4}{24 T^4} i_n$$

Werte siehe EXCEL-Blatt.

- d.) Lösen Sie a.) mit dem Taylorreihenverfahren 4. Ordnung und vergleichen Sie die Ableitungswerte für $f'(x_i)$, $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ und $f^{(4)}(x_i)$ mit den Grössen a , b , c , d .

Antwort:

Überlegen Sie sich ob folgende Betrachtungen stimmen und argumentieren Sie jeweils pro/contra:

Für RK4 gilt!

a verkörpert den Ableitungswert bei x_i .

b c verkörpern Näherungen für die Ableitung bei $x_i + h/2$

d verkörpert eine Näherung für die Ableitung bei $x_{i+1} = x_i + h$

Für unsere vorherige Aufgabe gilt:

$$i(t) = e^{-\frac{t}{T}} \quad (\text{exakte Lsg.}) \quad t_0 = 0, T = RC = 4.7 \cdot 10^{-3}$$

$$i'(t) = -\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad i'(t_0) = \frac{-1}{4.7 \cdot 10^{-3}} e^{-\frac{0}{4.7 \cdot 10^{-3}}} = -212.77 \quad = a$$

$$i'(t_1) = -\frac{1}{T} e^{-\frac{t_0+h}{T}} = \frac{-1}{4.7 \cdot 10^{-3}} e^{-\frac{0.002}{4.7 \cdot 10^{-3}}} = -139.02 \quad \approx d$$

$$i''(t) = \frac{1}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \quad i''(t_0) = \frac{1}{(4.7 \cdot 10^{-3})^2} e^{-\frac{0}{4.7 \cdot 10^{-3}}} = 45269.35 \quad \approx -2 \frac{a-b}{h}$$

$$i'''(t) = -\frac{1}{T^3} e^{-\frac{t}{T}} \quad i'''(t_0) = \frac{-1}{(4.7 \cdot 10^{-3})^3} e^{-\frac{0}{4.7 \cdot 10^{-3}}} = -9631777 \quad \approx -4 \frac{b-c}{h^2}$$

$$i^{(4)}(t) = \frac{1}{T^4} e^{-\frac{t}{T}} \quad i^{(4)}(t_0) = \frac{1}{(4.7 \cdot 10^{-3})^4} e^{-\frac{0}{4.7 \cdot 10^{-3}}} = 2.04931 \cdot 10^9 \quad \approx ?$$

